Manuel M. López Vázquez

DIBUJO GEOMETRICO

¡Así, más fácil!

ESCUELA DE LA MARINA

Manuel M. López Vázquez
Ingeniero Técnico
Profesor Titular de la
Escuela U. de Ingeniería T.
Naval de Cádiz

Dibujo Geométrico

1ª Edición

Dedicatoria:

Quiero dedicar este libro a Sonia, mi nieta, con la ilusión de que tanto a ella como a sus futuros compañeros de estudio, su paso por la vida les sea "más fácil" con la ayuda de algo tan bonito como es ver ésta tal y como yo quisiera, verla con el color de la ilusión.

Manuel M. López Vázquez

Prólogo

Ha pasado algo más de un año desde que mi primer libro "Geometría Descriptiva" Sistema Diédrico ¡Así, más fácil! apareció en el mercado.

En aquellas fechas nacía con la necesidad de facilitar al alumno la comprensión y familiarización de un conjunto de conocimientos básicos, consciente de las dificultades que el sistema presentaba.

Una de las mayores ventajas de la obra era la utilización del color en las distintas figuras, que en su conjunto facilitaban la interpretación.

La favorable acogida dispensada tanto por profesores como por alumnos, no sólo recompensa con creces los esfuerzos y las horas invertidas en su realización, sino que me han animado a escribir este segundo libro: "Dibujo Geométrico" ¡Así, más fácil!

Las ventajas que aporta esta nueva obra podemos resumirlas en tres:

1.ª Todas las figuras han sido impresas en color, para mejor interpretación del alumno.

2.ª Todos los textos aparecen en las páginas de la izquierda, mientras que las figuras correspondientes aparecen en las de la derecha, permitiendo esto leer el texto, a la vez que se visualizan las figuras.

3.ª Todos los ejercicios se explican por pasos, siendo éstos los necesarios para poder resolverlos, por el sistema tradicional o con la ayuda de los ordenadores.

Esperando haber aportado algo que facilite la comprensión de esta disciplina, deseo a todos los alumnos interesados en el Dibujo Técnico que le sea todo lo útil que yo deseo.

EL AUTOR

Manuel M. López Vázquez

1993

DIBUJO GEOMÉTRICO

ÍNDICE

Tema 1	Construcciones geométricas elementales	14
Tema 2	Construcción de triángulos	28
Tema 3	Construcción de polígonos	38
Tema 4	Tangencias y enlaces	44
Tema 5	Igualdad, semejanza y equivalencia	58
Tema 6	Óvalos, ovoides y arcos	68
Tema 7	Elipse	76
Tema 8	Parábola	88
Tema 9	Hipérbola	98
Tema 10	Curvas	106
Tema 11	Escalas y ábacos	120
Tema 12	Rectificación de curvas, arco capaz y aplicación de tangencias	128
Tema 13	Homología, afinidad, sus aplicaciones	136
Tema 14	Lugares geométricos, eje y centro radical, polo y polar	144
Tema 15	Hélices cilíndrica y cónicas, sus desarrollos	150

Construcciones geométricas elementales

Fig. 1

Trazar una perpendicular al segmento MN por su punto medio O. (Mediatriz del segmento dado MN.)

1. Por el punto N trazamos el arco a de radio NM.
2. Por el punto M trazamos el arco b de radio MN.
3. Los arcos a y b se cortan en los puntos A y C.
4. La unión de los puntos A y C determinan la recta m. (Mediatriz del segmento dado MN.)

Fig. 2

Trazar una recta m perpendicular a otra dada t por un punto P de ésta.

1. Con centro en P trazamos un arco de radio r, que cortará a la recta t en los puntos M y N.
2. Con centro en N y radio NM trazamos el arco b.
3. Con centro en M y radio MN trazamos el arco c.
4. Los arcos b y c se cortan en el punto A.
5. La unión de los puntos A y P determinan la recta m, que pasando por el punto P es perpendicular a la recta dada t.

Fig. 3

Trazar una recta m perpendicular a una semirrecta t que pase por su origen O.

1. Con centro en O trazamos un arco de radio r que cortará a la recta t en el punto A.
2. Con centro en A y radio r trazamos un arco que cortará al anterior en el punto M.
3. Con centro en M y radio r trazamos el arco a, que cortará al anterior en el punto N.
4. Con centro en N y radio r trazamos el arco b, que necesariamente pasará por el punto M.
5. Los arcos a y b se cortarán en el punto T.
6. La unión de los puntos T y O determinan la recta m solución del problema.

Fig. 4

Trazar una recta m perpendicular a una semirrecta t que pase por su origen O. (Segundo procedimiento.)

1. Tomamos un punto cualquiera P exterior a la semirrecta t.
2. Con centro en el punto P trazamos la circunferencia de radio R = PO que cortará a la semirrecta t en M.
3. Unimos M y P obteniéndose el punto N en la circunferencia trazada anteriormente.
4. La unión de los puntos N y O determinará la recta m solución del problema.

Fig.1

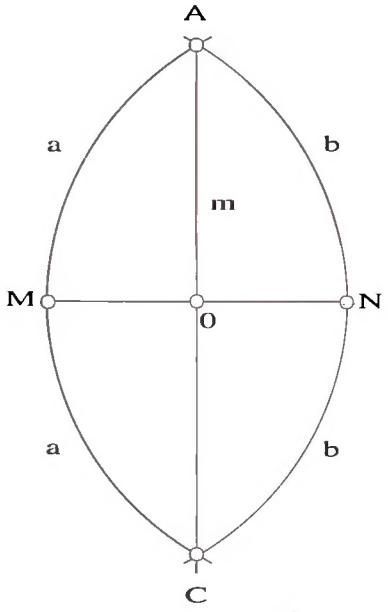


Fig.2

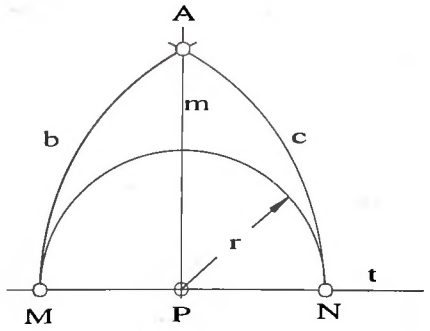


Fig.3

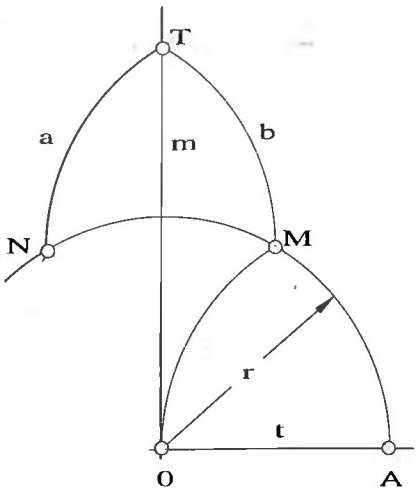


Fig.4

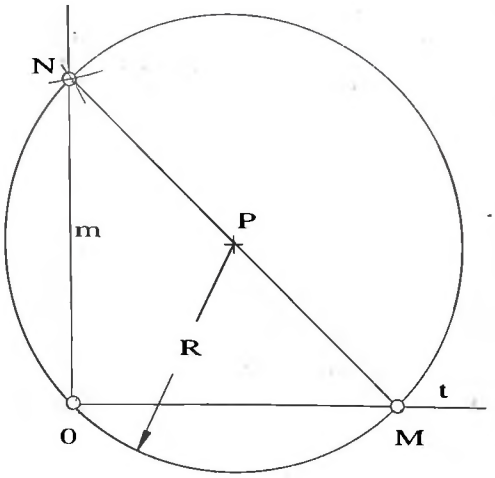


Fig. 5

Trazar una perpendicular a una recta dada t por un punto P exterior a ella.

1. Por el punto P trazamos un arco de radio r, que cortará a la recta t en los puntos M y N.
2. Por los puntos M y N trazamos arcos de radio R = MN.
3. Los arcos se cortarán en el punto Q.
4. La unión de los puntos P y Q determinan la recta solución de nuestro problema.

Fig. 6

a. Trazar rectas paralelas a la recta dada t por los puntos S, T y R. (Utilizar la escuadra y el cartabón como se indica en la Fig. 7.)

b. Trazar rectas perpendiculares a la recta dada t por los puntos M, N y P. (Utilizar la escuadra y el cartabón como se indica en la Fig. 8.)

Fig. 7

1. Colocar el cartabón en la dirección d1 y sobre su hipotenusa apoyar la escuadra.

2. El desplazamiento de la escuadra sobre la hipotenusa del cartabón en la dirección d1 nos dará las distintas rectas r paralelas entre sí.

Fig. 8

1. Colocar el cartabón en la dirección d1 y sobre su hipotenusa apoyar la escuadra.

2. El desplazamiento de la escuadra sobre la hipotenusa del cartabón en la dirección d1 nos dará las distintas rectas r paralelas entre sí y perpendiculares a la dirección d2.

Fig.5

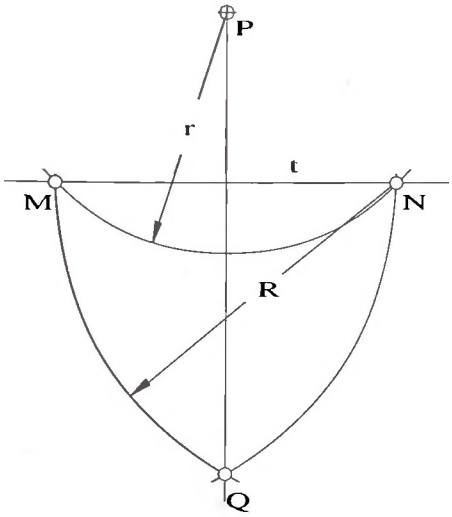


Fig.6

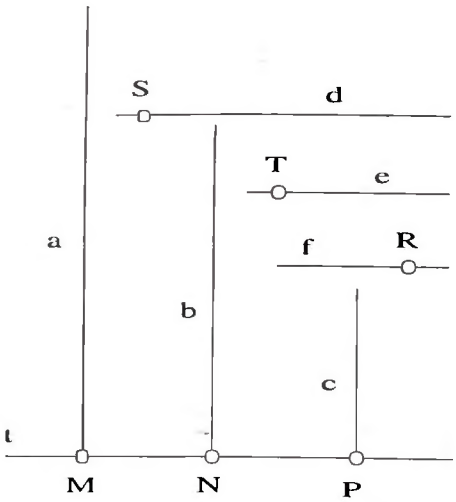


Fig.7

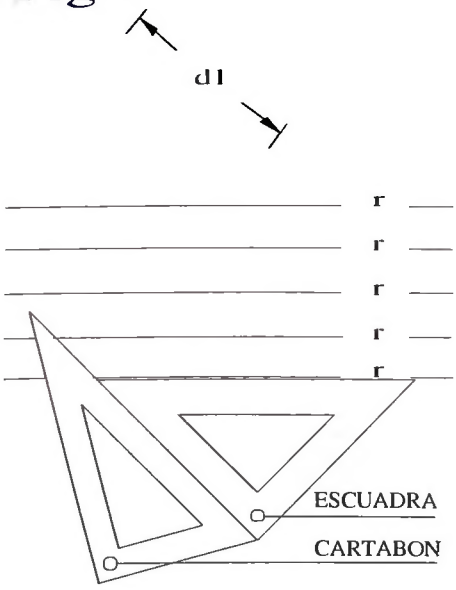


Fig.8

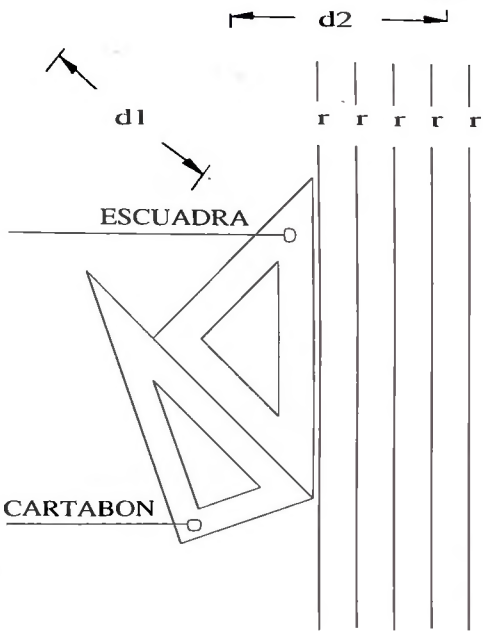


Fig. 9

Por el punto P trazar una recta s paralela a la recta dada t.

1. Por el punto P trazamos un arco a de radio R que cortará a la recta dada t en el punto M.
2. Con centro en el punto M y radio R = MP trazamos otro arco b que cortará a la recta dada t en el punto N.
3. Haciendo centro en M y con radio NP cortamos al arco a en el punto Q.
4. La unión de los puntos P y Q determinan la recta s solución del problema.

Fig. 10

Segundo procedimiento del ejercicio anterior.

1. Por P trazamos el arco a de radio R para obtener el punto O.
2. Por el punto O trazamos un semicírculo de radio OP que cortará a la recta dada t en los puntos M y N.
3. Con centro en el punto M y radio NP cortamos a la semicircunferencia anterior en el punto Q.
4. La unión de los puntos P y Q determinan la recta s solución del problema.

Fig. 11

Trazar una recta s paralela a otra recta dada t a una distancia d.

1. Tomamos un punto P en la recta t.
2. Por P trazamos la recta m perpendicular a la recta t.
3. A partir del punto P y sobre la recta m tomamos la distancia d obteniéndose el punto A.
4. A partir de A trazamos la perpendicular a la recta m. La recta s es la solución del problema.

Fig. 12

Construir un cuadrado de lado l.

1. Sobre una recta t se toman los puntos P y R distantes entre sí el valor del lado dado l.
2. A partir del punto P y sobre el segmento PR tomamos tres unidades obteniéndose el punto M.
3. A partir de los puntos P y M trazamos los arcos a y b cuyos valores serán de 4 y de 5 unidades respectivamente
4. Los arcos a y b se cortan en el punto N.
5. La unión de los puntos N y P determinarán la recta s perpendicular a la recta dada t.
6. A partir del punto P y sobre la recta s llevamos la distancia l obteniéndose el punto T.
7. A partir de los puntos T y R trazamos los arcos c y d con el valor de l obteniéndose el punto Q.
8. La unión de los puntos P, T, Q y R es la solución.

Fig.9

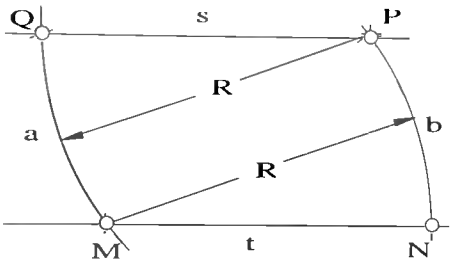


Fig.10

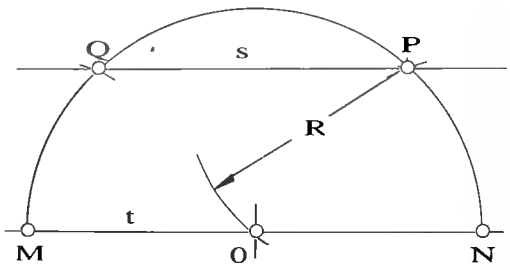


Fig.11

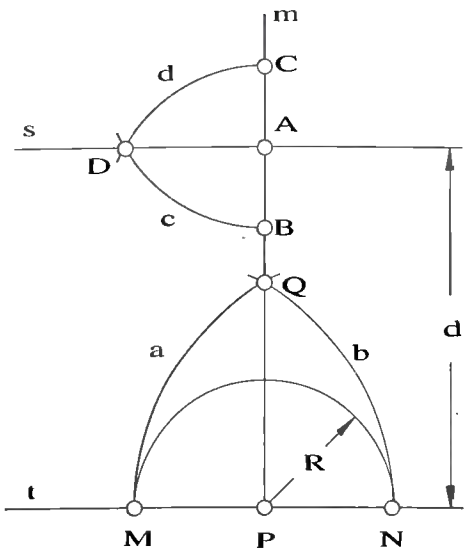


Fig.12

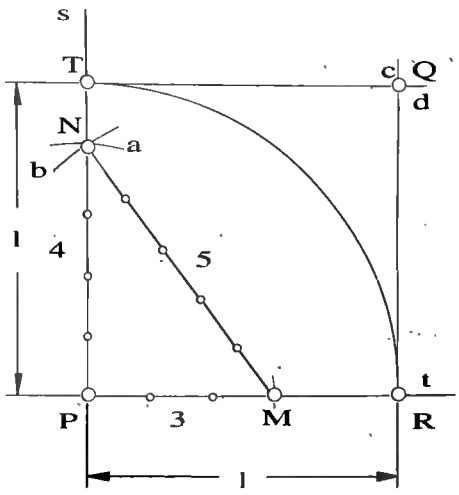


Fig. 13

Dividir el segmento MN en un número de partes iguales (por ejemplo en siete).

1. Por uno de los extremos del segmento, en nuestro caso el M trazamos una recta cualquiera t.
2. Con centro en M y sobre la recta t se toman siete distancias iguales M-1, 1-2, 2-3, ...etc.
3. Unimos el punto siete con el extremo N del segmento.
4. Trazamos paralelas al segmento 7N por los puntos 6, 5, 4, 3, 2, 1, de la recta t que cortarán al segmento dado MN en los puntos 6', 5', 4', 3', 2', 1'. Solución del problema.

Fig. 14

Dividir un segmento MN en partes proporcionales a los segmentos dados, a, b y c.

El caso deberá ser resuelto de forma similar al anterior.

Fig. 15

Dividir una circunferencia en un número determinado de partes. (En nuestro caso nueve.)

1. Con centro en los extremos M y N del diámetro, trazamos los arcos a y b de radio MN que se cortarán en el punto P.
2. Dividimos el segmento MN en nueve partes. (Ver Fig. 13.)
3. Unimos la segunda división del diámetro MN con el punto P. (Pudiendo ser la 2 ó la 7.) En nuestro caso la 7 obteniéndose en la circunferencia el punto 2.
4. El segmento N2 es el lado del polígono regular inscrito de nueve lados, solución del problema.

Fig. 16

Trazar un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio Oa en base al ejercicio anterior.

Fig. 17

Hallar gráficamente la raíz cuadrada de un segmento. (En nuestro caso de 10 unidades.)

1. Trazamos el segmento MN de valor = 10 unidades.
2. Transportamos hacia la izquierda del punto M una unidad obteniéndose el punto V.
3. Trazamos la mediatriz del segmento VN para trazar el semicírculo de radio R.
4. La perpendicular levantada al segmento VN por el punto M corta al círculo de radio R en el punto X.
5. La distancia MX es el valor de la raíz cuadrada del segmento MN. Solución del problema.

Fig.13

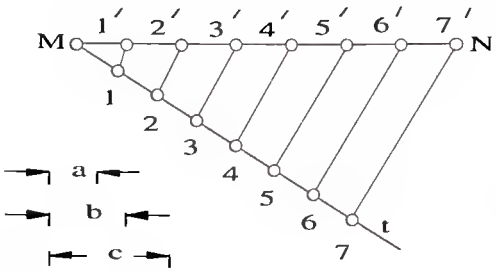


Fig.14

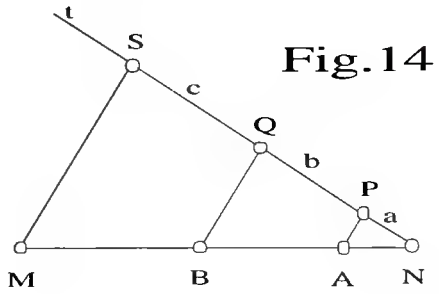


Fig.15

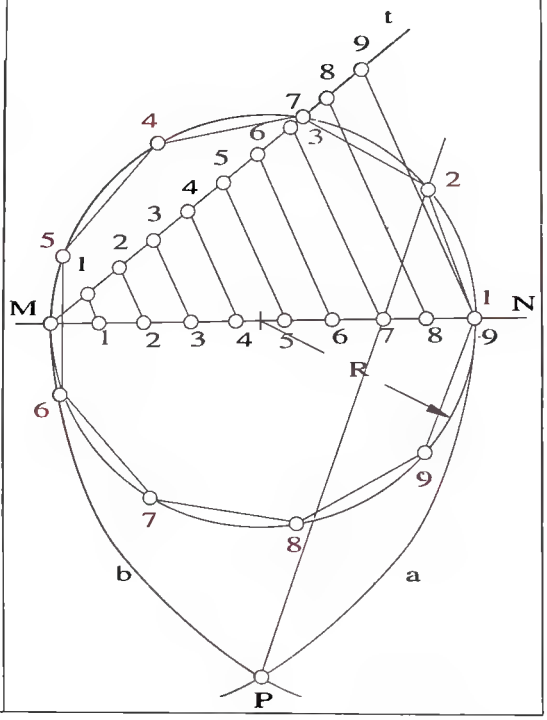


Fig.16

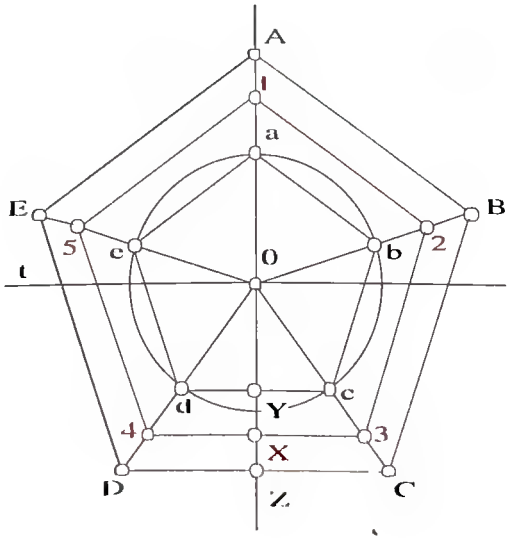


Fig.17

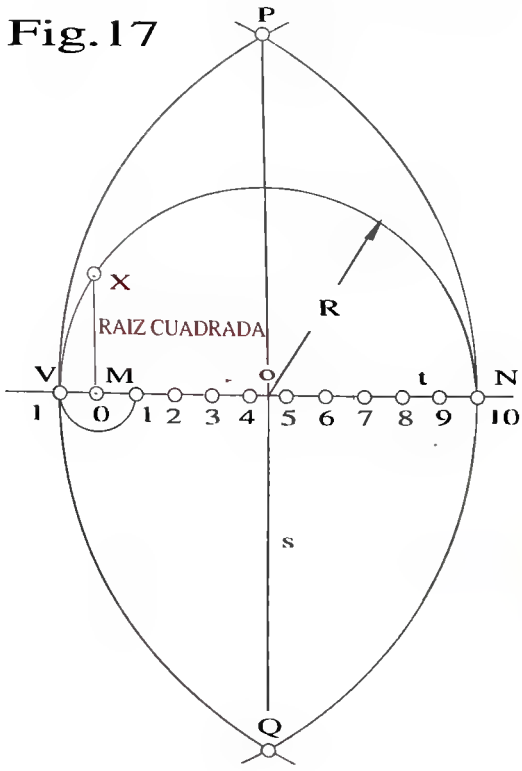


Fig. 18

Hallar la medida proporcional a los segmentos a y b.

1. Sobre una recta s y a partir de un punto M de ella tomamos las distancias a y b obteniéndose los puntos P y N.
2. Con centro en O punto medio del segmento MN trazamos una semicircunferencia de radio OM = ON.
3. Por el punto P levantamos una perpendicular al segmento MN que cortará a la semicircunferencia anterior en el punto T.
4. El segmento PT es el segmento media proporcional entre los segmentos dados a y b.

Fig. 19

Hallar la tercera proporcional a los segmentos a y b.

1. Sobre una recta s y a partir de un punto M de ella se toma la distancia b obteniéndose el punto Q.
2. A partir del punto M trazamos una recta cualquiera t.
3. A partir del punto M y sobre la recta t tomamos la distancia a obteniéndose el punto P.
4. Unimos los puntos P y Q.
5. Haciendo centro en el punto M y con radio MQ trazamos un arco que cortará a la recta t en el punto R.
6. Por el punto R trazamos una paralela al segmento PQ obteniéndose en la recta s el punto N.
7. El segmento MN es la tercera proporcional a los segmentos dados a y b.

Fig. 20

Hallar la cuarta proporcional a los segmentos a, b y c.

1. Sobre la recta t tomamos el segmento a y sobre la recta r los segmentos b y c obteniéndose los puntos S, Q y R respectivamente a partir del punto O intersección de ambas rectas.
2. Por el punto Q trazamos una paralela al segmento RS que cortará a la recta t en el punto X.
3. El segmento OX es el segmento cuarta proporcional a los segmentos dados a, b, y c.

Fig. 21

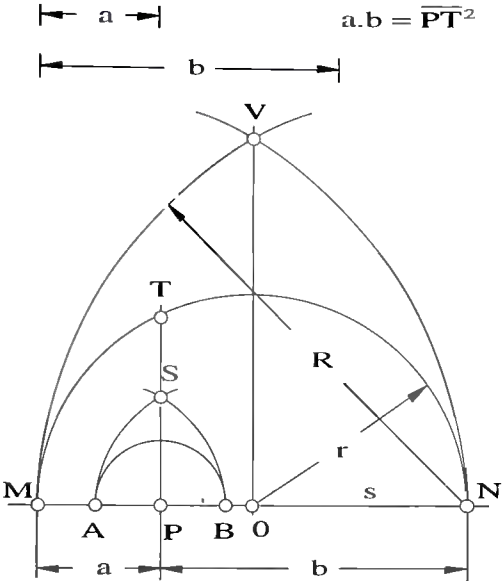
Multiplicar gráficamente los segmentos dados a y b.

Emplearemos el mismo sistema aplicado en la figura 20 debiéndose tener en cuenta que el segmento OP = a la unidad. La solución es el segmento MN = a.b.

Fig.18

$$\frac{a}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{b}$$

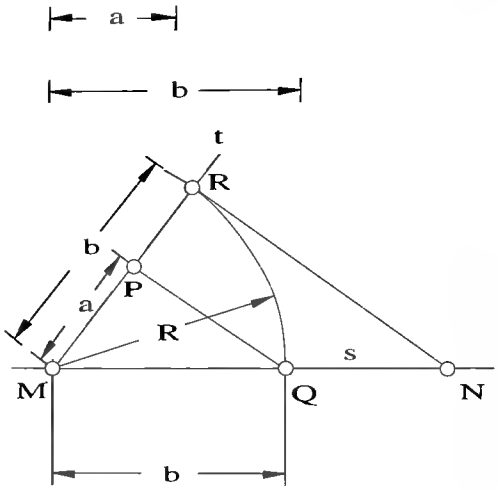
$$a.b = \overline{PT}^2$$



$\overline{PT}$ = Media proporcional

Fig.19

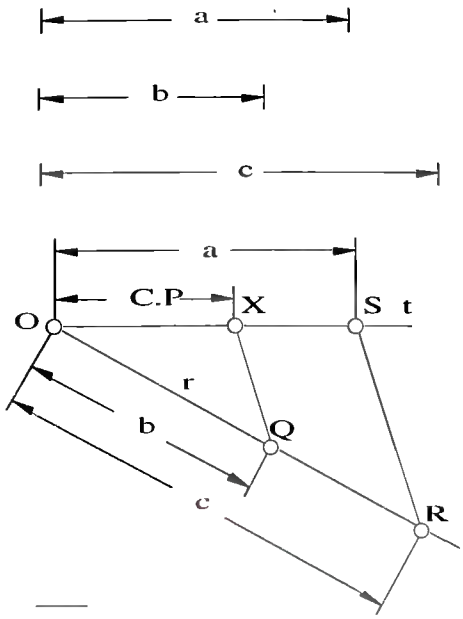
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{MN}}$$



$\overline{MN}$ = Tercera proporcional

Fig.20

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{\overline{OX}}$$



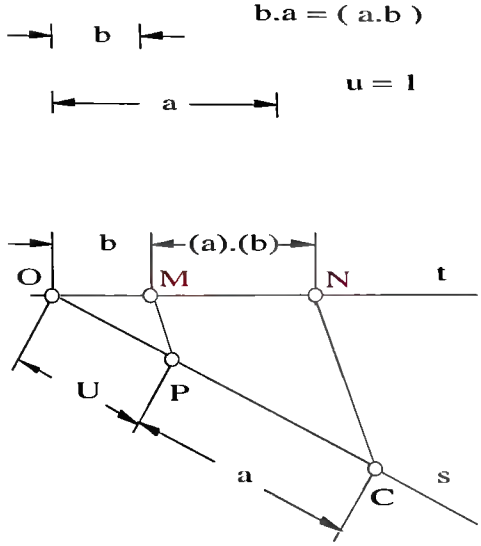
$\overline{OX}$ = Cuarta proporcional

Fig.21

$$\frac{b}{u} = \frac{a.b}{a}$$

$$b.a = (a.b)$$

$$u = 1$$



$\overline{MN}$ = a.b

Fig. 22

Hallar la bisectriz del ángulo AMB.

1. Con centro en el vértice M trazamos un arco que cortará a los dos lados del ángulo en los puntos A y B.
2. Con cualquier radio y centro en los puntos A y B trazamos arcos que se cortarán en el punto N.
3. La unión de los puntos M y N será la solución del problema.

Fig. 23

Trazar ángulos 22,5º - 30º - 45º y 60º.

1. Sobre una recta r tomamos un punto M.
2. Por el punto M levantamos una perpendicular s a r.
3. Por M trazamos un arco que cortará a s y r en A y B.
4. Con centro en A y B trazamos arcos que se cortarán en P.
5. La unión de los puntos M y P es la recta que forma 45° con r y s, bisectriz del ángulo AMB.
6. Con centro en B y E, con un radio cualquiera, trazamos arcos que se cortarán en el punto Q. La unión de los puntos Q y M será la recta que forma con la r un ángulo de 22,5º. La recta QM es la bisectriz del ángulo EMB de 45º
7. Con centro en el punto M trazamos un arco de radio R que cortará a las rectas s y r en los puntos A y B, respectivamente. Con centro en B y en A trazamos arcos de radio R que cortará al anteriormente trazado en los puntos C y D. Las rectas DM y CM formarán con la recta r ángulos de 30º y 60º respectivamente.

Fig. 24

Trazar la bisectriz de un ángulo mixtilíneo formado por la recta l y el círculo de radio R y de centro O.

1. A partir del punto O se traza la recta t y por un punto cualquiera de la recta l la perpendicular s.
2. Trazamos paralelas equidistantes a la recta l y arcos equidistantes al radio R, que se cortarán en los puntos 1 - 2 - 3 - 4 ... etc., que unidos nos darán la curva bisectriz, solución al problema.

Fig. 25

Trazar la bisectriz de un ángulo curvilíneo formado por los arcos de radio R y r que se cortan en el punto M.

Para encontrar la solución seguiremos los pasos del ejercicio fig. 24.

Fig. 26

Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y t, desconociéndose su vértice.

1. Trazamos la recta s que corta a las rectas r y t en los puntos M y N.
2. Trazamos las bisectrices de los ángulos formados por las rectas r-s y t-s que se cortarán en los puntos P y Q.
3. La unión de los puntos P y Q será la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y t, solución del problema.

   NOTA: La prolongación de las rectas r y t deberán cortarse en un punto de la bisectriz PQ.

Fig.22

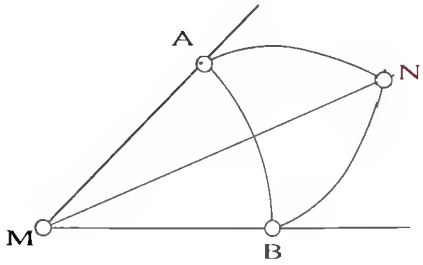


Fig.23

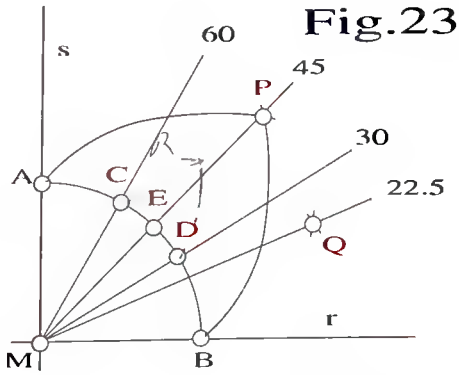


Fig.24

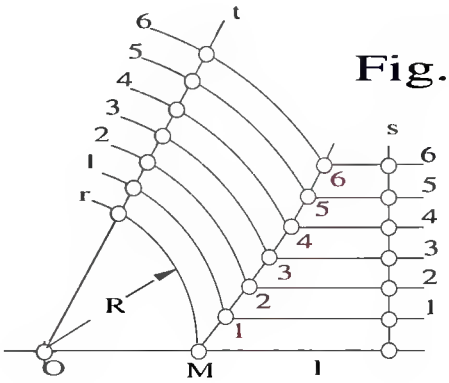


Fig.25

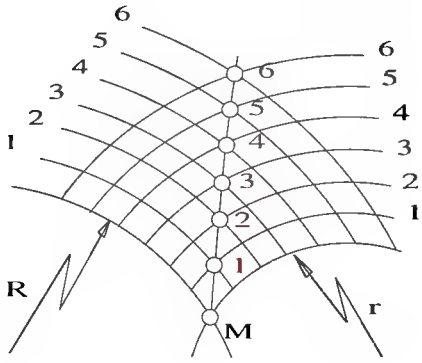
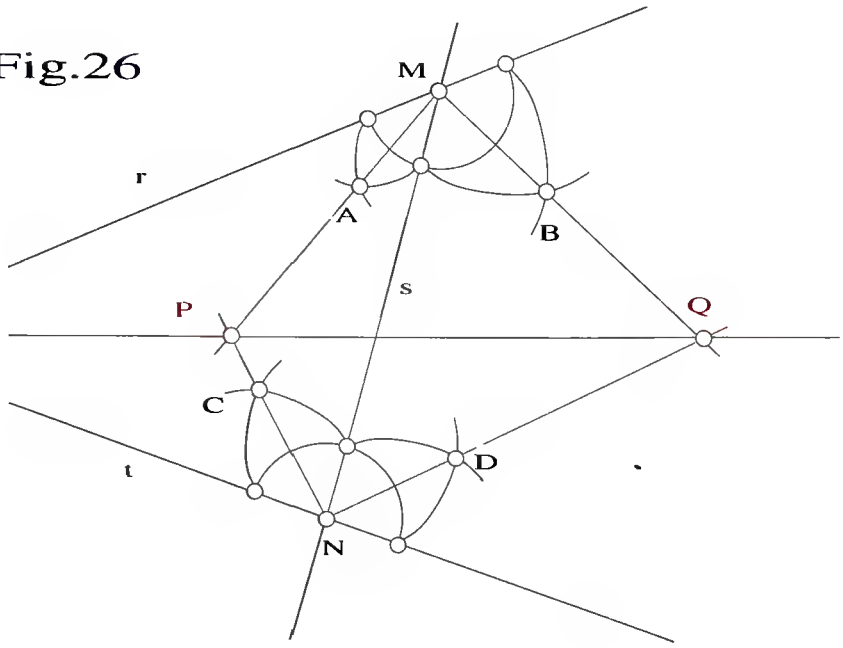


Fig.26



Construcción de triángulos

Fig. 27

Podemos definir el triángulo como la superficie de un plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos.

La intersección de las rectas determinarán sus vértices y los segmentos comprendidos entre cada dos vértices los denominaremos lados.

Los triángulos podemos clasificarlos: 1º) En función del valor de sus lados, ó 2º) De la magnitud de los ángulos formados por cada dos de sus lados.

1º) Fig. a Equilátero: cuando sus tres lados son iguales.
Fig. b Isósceles: cuando dos de sus lados son iguales.
Fig. c Escaleno: cuando sus tres lados son desiguales.

2º) Fig. d Rectángulo: cuando tiene un ángulo recto.
Fig. e Acutángulo: cuando sus tres ángulos son agudos.
Fig. f Obtusángulo: cuando uno de sus ángulos es obtuso.

NOTA: a) La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo será siempre de 180º.
b) Cualquier lado del triángulo será siempre menor que la suma de los otros dos lados.

Fig. 28

Trazar una circunferencia que sea tangente a los lados de un triángulo dado.

1.º Trazamos las bisectrices m, n y p a los ángulos del triángulo por los vértices A, B y C, respectivamente.
2.º Las bisectrices m, n y p se cortarán en el punto O que denominaremos INCENTRO.
3.º El punto O será el centro de la circunferencia tangente a los lados del triángulo.
4.º Las perpendiculares trazadas desde O a los lados del triángulo nos darán los puntos T_1, T_2 y T_3, puntos de tangencia entre el triángulo y la circunferencia interior tangente a los lados del triángulo.

Fig. 29

Trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo.

1.º Por los lados del triángulo trazamos sus mediatrices que se cortarán en el punto O, que denominaremos CIRCUNCENTRO.
2.º El punto O será el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y que pasará por sus vértices A, B y C.

NOTA: OA = OB = OC = Radio de la Circunferencia circunscrita.

Fig.27

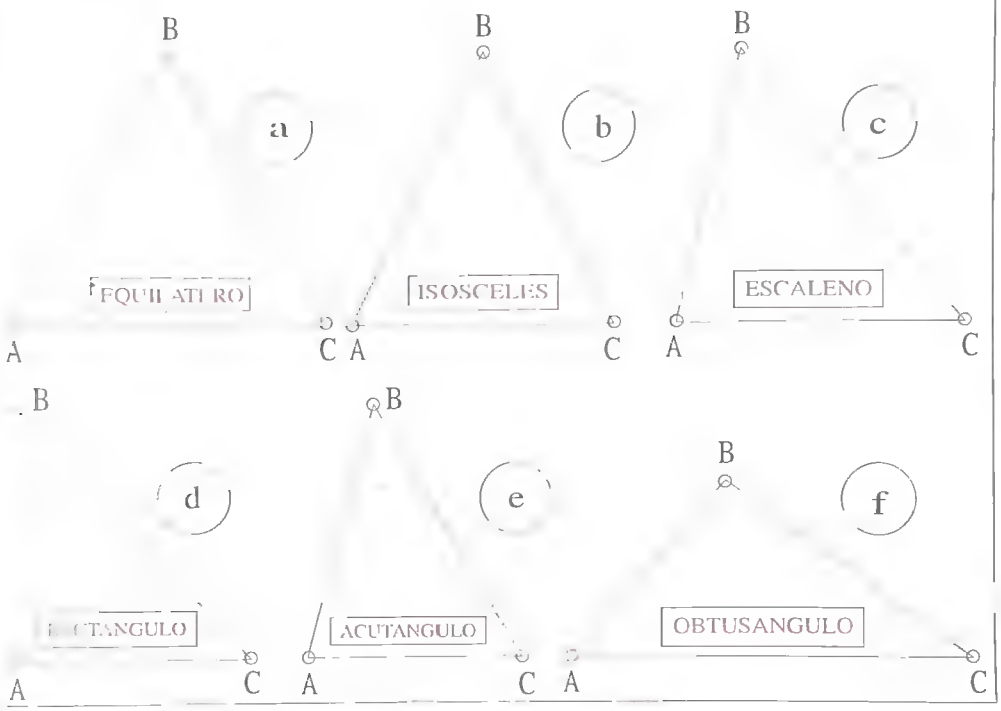


Fig.28

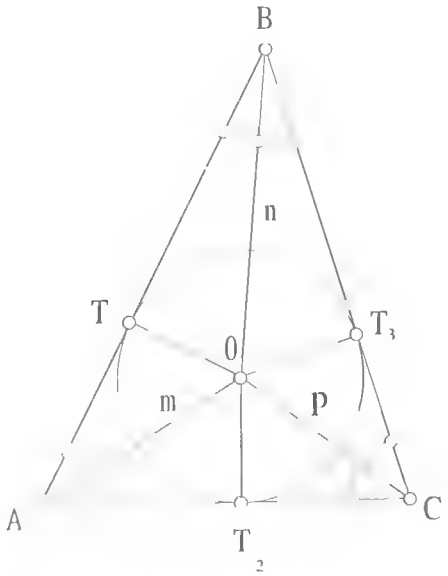


Fig.29

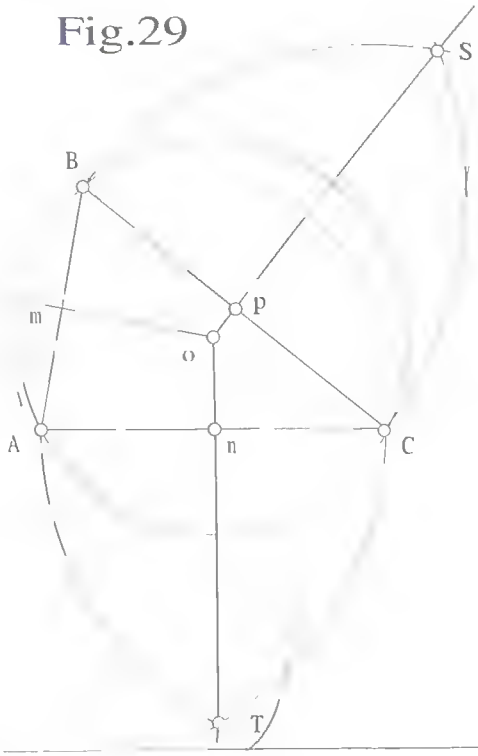


Fig. 30

Hallar el punto (O) ortocentro de un triángulo cualquiera.

1.º Dado el triángulo escaleno de vértices A, B y C, trazamos por A, B y C perpendiculares a los lados opuestos (h_a, h_b y h_c) respectivamente, que se cortarán en el punto O_o (ORTOCENTRO) solución del problema.

Fig. 31

Comentar la Fig. 31, debiéndose identificar cada uno de sus puntos en base a figuras estudiadas anteriormente.

Fig. 32

Hallar el centro de gravedad de un triángulo cualquiera. (BARICENTRO.)

1.º Dado el triángulo escaleno de vértices A, B y C, trazamos por cada uno de ellos rectas que cortan a los lados opuestos en sus puntos medios, obteniéndose los puntos M_a, M_b y M_c, respectivamente.

2.º La intersección de las rectas AM_a, BM_b y CM_c será el punto O_b baricentro del triángulo ABC, centro de gravedad de dicho triángulo.

Fig. 33

Hallar el centro del círculo circunscrito a un triángulo escaleno ABC.

1.º Levantamos una perpendicular al lado AB que sea mediatriz de este M_{tc}.

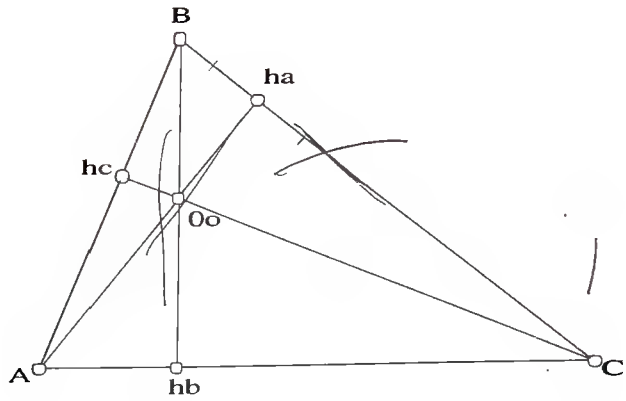
2.º Levantamos una perpendicular al lado BC que sea mediatriz de este M_{ta}.

3.º Las mediatrices M_{tc} y M_{ta} se cortarán en el punto O_c.

4.º La mediatriz M_{tb} trazada al lado AC se cortará necesariamente en el punto O_c.

5.º El punto O_c se denominará CIRCUNCENTRO, estudiado en la Fig. 29.

Fig. 30



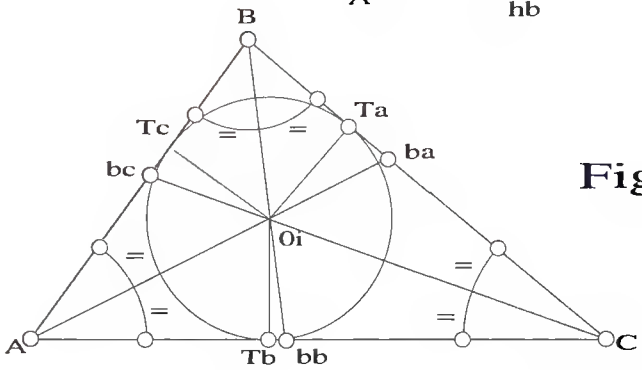
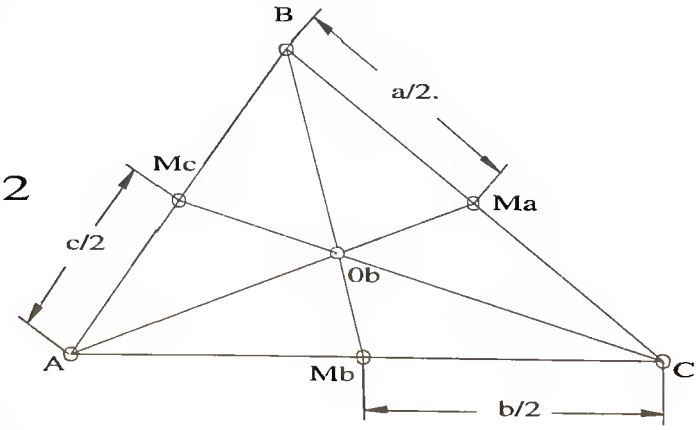


Fig. 31

Fig. 32



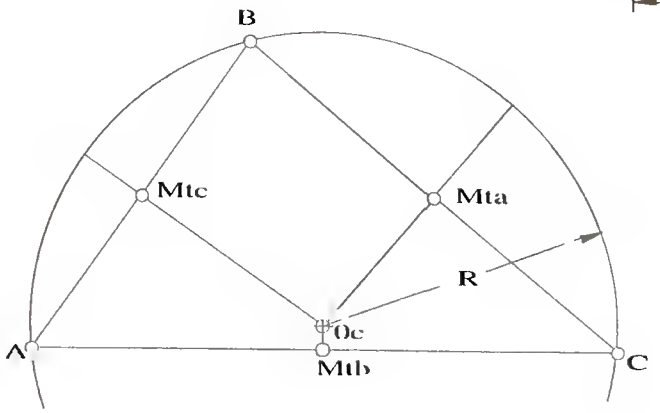


Fig.33

Fig. 34

Construir un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, conociéndose el radio (R) de ésta y la base (b) del triángulo.

1.º Trazamos una circunferencia de radio R.
2.º Trazamos el diámetro CP.
3.º Por el punto P trazamos una perpendicular al diámetro CP.
4.º A partir del punto P y a ambos lados de éste, tomamos las distancias $b/2$, obteniéndose los puntos M y N.
5.º Las perpendiculares al segmento MN por sus extremos M y N cortarán a la circunferencia en los puntos A y B.
6.º La unión de los puntos A, B y C nos dará la solución del problema.

Fig. 35

Construir un triángulo rectángulo, conociéndose su hipotenusa (h) y la diferencia entre sus catetos a y b.

1.º Trazamos una recta cualquiera en la dirección BC. = a.
2.º A partir del punto B llevamos la distancia a - b, obteniéndose el punto E.
3.º Por el punto E trazamos una recta que forma 45º con la recta de dirección BC.
4.º Con centro en el punto B trazamos un arco de radio igual al valor de la hipotenusa h.
5.º La unión de la recta trazada por el punto E y el arco trazado por el punto B nos dará el punto A.
6.º Por el punto A, trazamos una perpendicular al segmento BC obteniéndose el punto C.
7.º La unión de los puntos A, B y C nos dará el triángulo rectángulo, solución del problema.

Fig. 36

Construir un triángulo isósceles, conociéndose su altura y el semiperímetro.

1.º Trazamos unos ejes coordenados formándose el triángulo rectángulo DCB.
2.º CB será igual al semiperímetro dado.
3.º CD será igual a la altura dada.
4.º Unimos D con B y trazamos su mediatriz, que cortará al segmento CB en el punto E.
5.º Localizamos el punto A simétrico del punto E respecto al segmento CD.
6.º La unión de los puntos A, D y E será el triángulo isósceles pedido, solución del problema.

Fig. 34

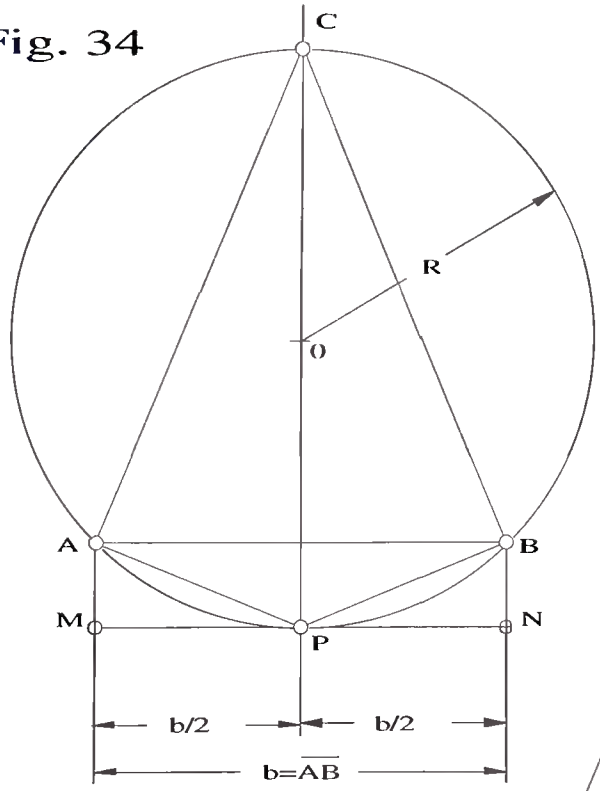
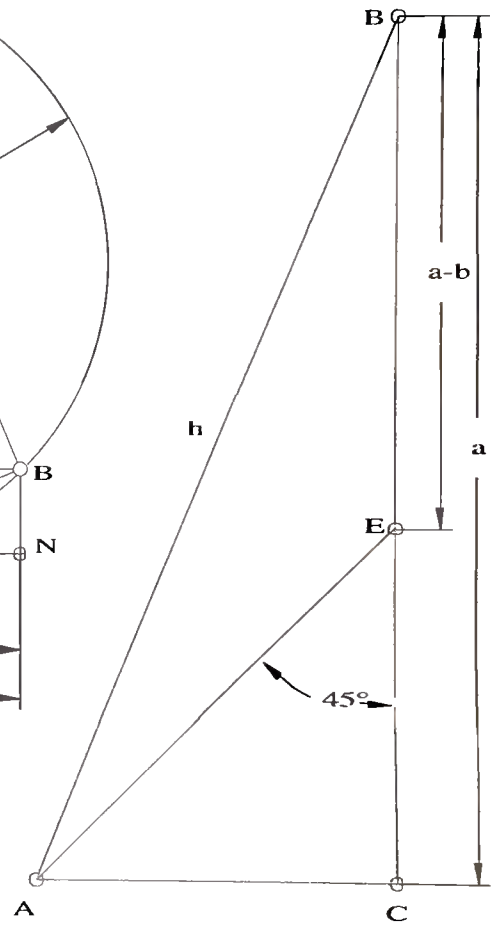


Fig.35



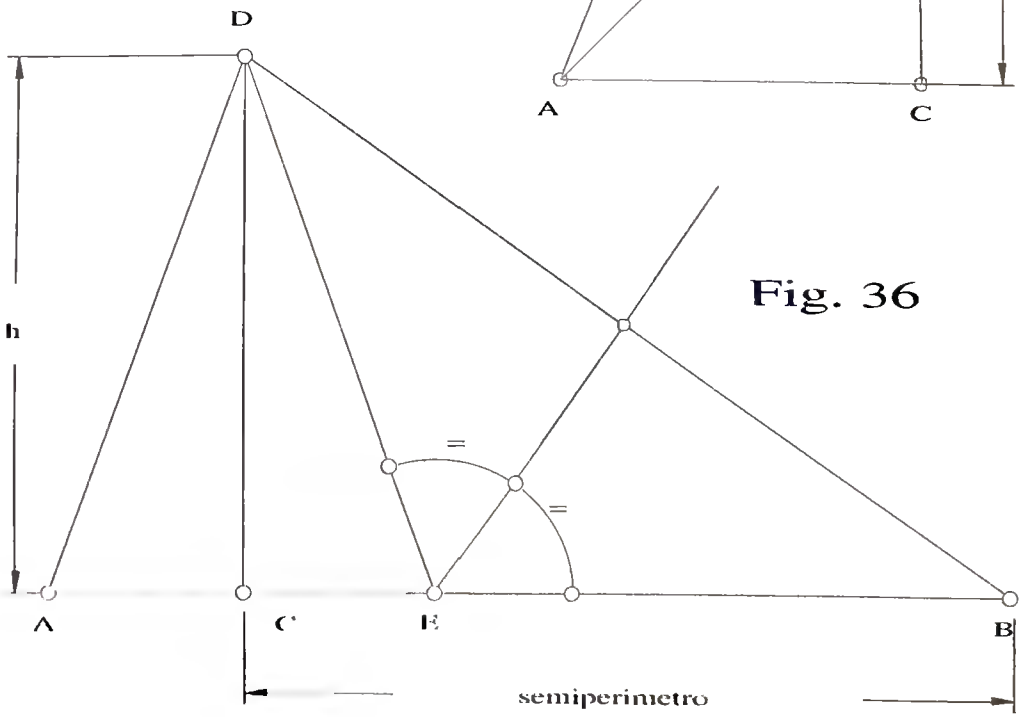


Fig. 36

Fig. 37

Construir un triángulo equilátero, conocido uno de sus lados.

1.° Los arcos de radio AC trazados con centros en A y C se cortan en el punto B.
2.º Los puntos A, B y C unidos será la solución del problema.

Fig. 38

Construir un triángulo equilatero, conocida su altura h.

1.° Construimos un triángulo equilátero cualquiera según Fig. 37.
2.° Por el vértice B trazamos la perpendicular a la base, obteniéndose la recta s.
3.º En la recta s y desde la base AC tomamos el valor de la altura h, obteniéndose el punto N.
4.º Por el punto N trazamos paralelas a los lados BC y BA del triángulo equilátero del apartado 1º obteniéndose los puntos P y M que unidos con el N será la solución al problema.

Fig. 39

Construir un triángulo equilátero, conocida su altura h. (Segundo procedimiento.)

1.º Trazamos una recta t y sobre ésta llevamos el valor de la altura h.
2.º Dividimos la altura h en tres partes, obteniéndose los puntos 1, 2 y 3. (Ver Fig. 13.)
3.º Por el punto 2 trazamos una circunferencia de radio R = 2B, que cortará a la perpendicular trazada a la recta t por el punto 3 en los puntos A y C.
4.º La unión de los puntos A, B y C será la solución del problema.

Fig. 40

Construir un triángulo cualquiera, conociéndose sus tres lados.

1.º Similar a la Fig. 37, las radios tendrán el valor de los lados b y c.

Fig. 41

Construir triángulos rectángulos, conociéndose su hipotenusa y uno de sus catetos.

1.º Trazamos el segmento MN igual al valor de la hipotenusa y con centro en su punto medio, trazamos una semicircunferencia de diámetro igual al valor de la hipotenusa.
2.º Desde el punto M o N trazamos arcos con el valor del cateto, que cortará a la semicircunferencia en un punto que, unido con los M y N, nos dará la solución.

Fig. 42

Construir un triángulo, conocido uno de sus ángulos y el lado opuesto.

1.º Trazamos el ángulo α y por un punto cualquiera de uno de sus lados, por ejemplo el C. Trazamos un arco con el valor del lado opuesto, que cortará al otro lado r en:

a) Los puntos B_1 y B_2, dos soluciones (Radio a_1).
b) El punto B_3, una solución (Radio a_2).

Fig. 43

Construir un triángulo rectángulo, conociéndose su hipotenusa y la diferencia h entre sus catetos.

Similar a la Fig. 35.

Fig.37

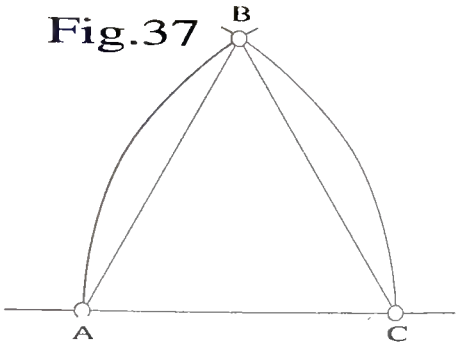


Fig.38

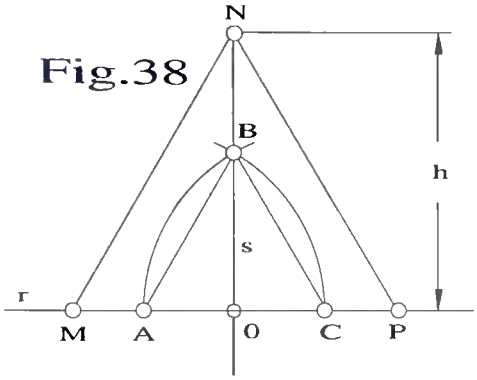


Fig.39

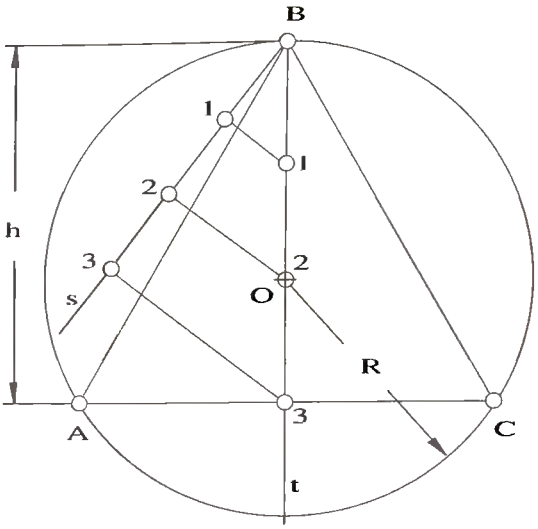
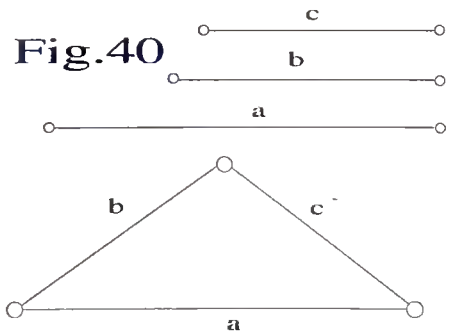


Fig.40



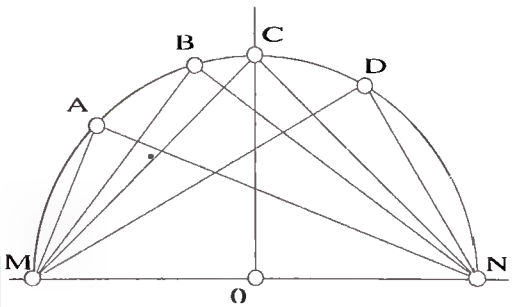


Fig.41

Fig.42

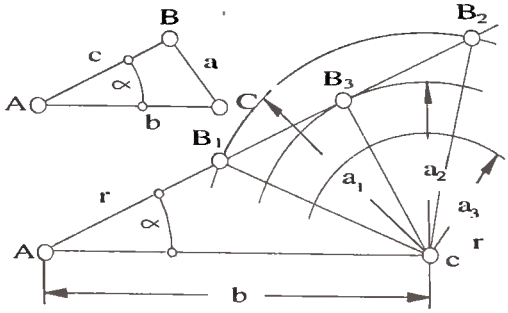
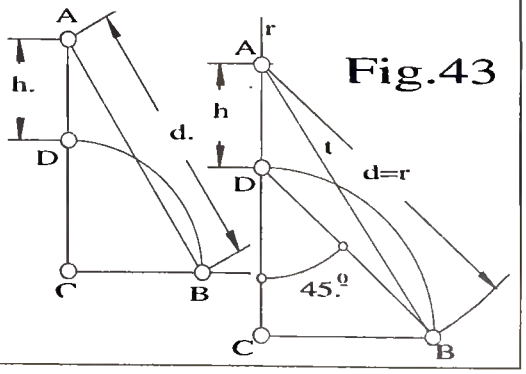


Fig.43



Construcción de polígonos

Fig. 44

Trazar un hexágono regular y un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia dada.

1.º Con el valor del lado trazamos una circunferencia de radio = r, cuyo centro es O.
2.º Por un punto de la circunferencia tal como el 1, trazamos arcos consecutivos de radio r, que irán cortando a la circunferencia en los puntos 2-3-4-5-6-1.
3.º La unión de los puntos 1-2-3-4-5 y 6 será el polígono de 6 lados (hexágono de lado = r).
NOTA: La unión de los vértices alternativos, en nuestro caso el 2, 4 y 6 nos dará el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia circunscrita al hexágono dado, de lado = r.

Fig. 45

Trazar un cuadrado y un octógono regular inscrito en una circunferencia.

1.º Trazamos dos diámetros perpendiculares, que cortarán a la circunferencia en los puntos 1-3-5 y 7 que, unidos entre sí, determinarán el cuadrado inscrito en la circunferencia dada.
2.º La mediatriz al segmento 1-3 cortará a la circunferencia dada en los puntos 2 y 6.
3.º La mediatriz al segmento 1-7 cortará a la circunferencia dada en los puntos 4 y 8.
4.º La unión de los puntos 1-2-3-4-5-6-7 y 8 determinarán el octógono inscrito en la circunferencia dada.

Fig. 46

Trazar un pentágono y decágono inscrito en una circunferencia dada.

1.º Trazamos dos diámetros perpendiculares y hallamos el punto A mediatriz del segmento OC.
2.º Con centro en A y radio A1, trazamos el arco b que cortará al eje EC en el punto D.
3.º La unión de los puntos 1D y DO serán, respectivamente, los valores de los lados del pentágono y decágono inscritos en la circunferencia dada.

Fig. 47

Trazar un eptágono regular inscrito en una circunferencia dada.

1.º Trazamos una perpendicular al diámetro AB de la circunferencia dada por el punto P mediatriz del radio OA, que cortará a la circunferencia en el punto Q.
2.º El segmento PQ será el valor del lado del eptágono inscrito en la circunferencia dada.

Figs. 48 y 49

Construcción de polígonos regulares estrellados.

1.º Para su construcción dividiremos la circunferencia en tantas partes como lados haya de tener el polígono.
2.º Unimos las divisiones de la circunferencia de dos en dos, de tres en tres, etc.
3.º Para considerar un polígono estrellado, es necesario que, partiendo de un vértice, se recorran todos hasta retornar al punto de partida.

En el caso de la Fig. 48 esto no se cumple, por lo tanto, el hexágono no puede ser un polígono estrellado. En el caso de la Fig. 49, el polígono de 7 lados tiene dos soluciones, según se unan los puntos de la circunferencia de dos en dos o de tres en tres.

Fig.44

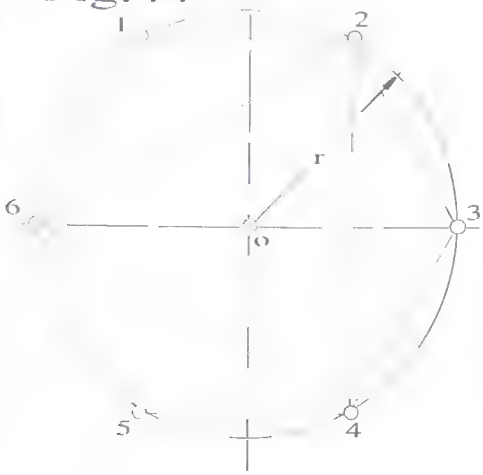


Fig.45

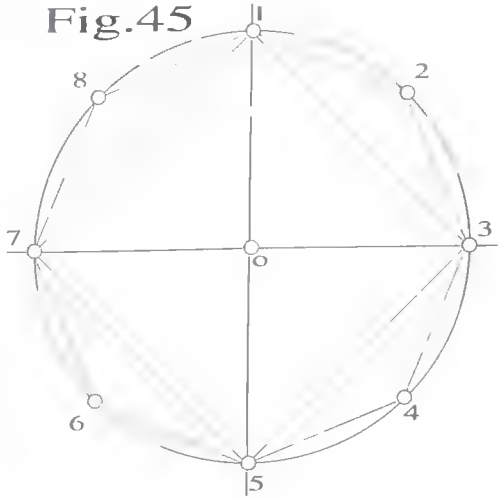


Fig.46

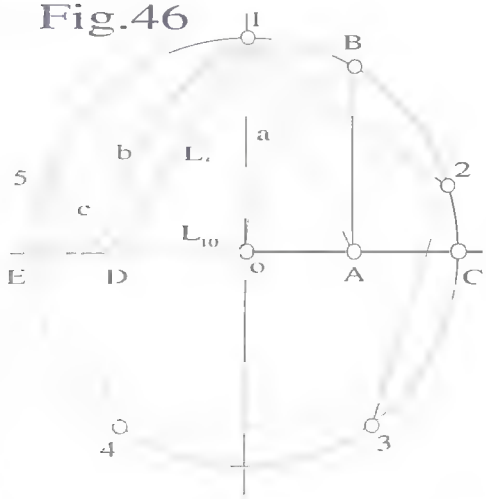


Fig.47

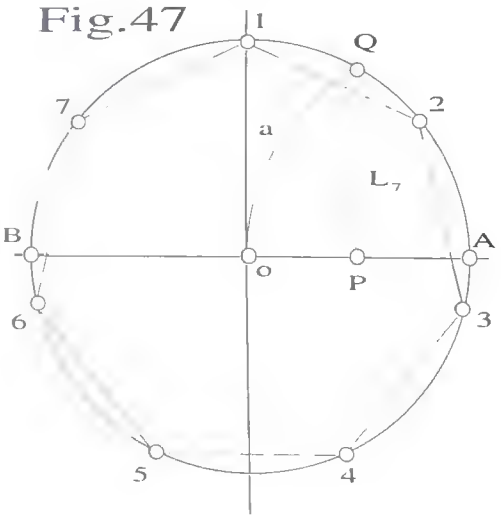


Fig.48

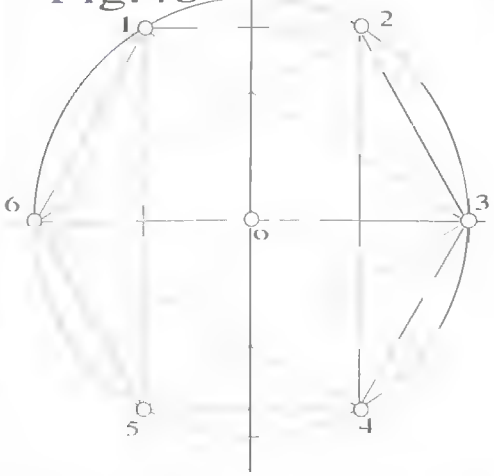


Fig.49

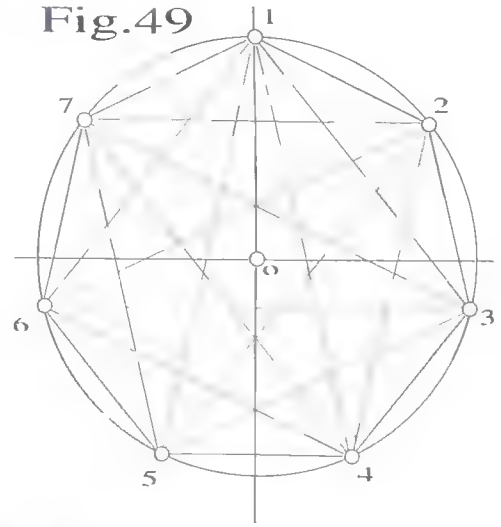


Fig. 50

De acuerdo con la fig. 37, demostrar que el triángulo ABC es equilátero.

Fig. 51

Construir un cuadrado, conocido el lado AD.

1.º Levantamos perpendiculares al lado AD por sus extremos.
2.º Con radio AD y centro en A y D trazamos arcos que cortarán a las perpendiculares en los puntos B y C.
3.º La unión de los puntos A, B, C y D será la solución.

Fig. 52

Construir un pentágono regular, conocido el lado 1-2.

1.º Trazamos una perpendicular por el extremo 2 del lado 1-2.
2.º Trazamos una perpendicular por el punto A mediatriz del segmento 1-2 a dicho segmento.
3.º Con centro en el punto 2 y radio 1-2 trazamos un arco que cortará en el punto B a la perpendicular trazada en el apartado 1.
4.º Con centro en el punto A y radio AB trazamos un arco que cortará a la prolongación de lado 1-2 en el punto C.
5.º Trazamos arcos con centros en los puntos 1 y 2, de radios 1C y 2 B, respectivamente, que se cortarán en el punto 3.
6.º El arco 1 C cortará a la recta trazada en el apartado 2 en el punto 4.
7.º Con el valor del lado 1-2 trazamos arcos con centro en los puntos 1 y 4, obteniéndose el punto 5.
8.º La unión de los puntos 1-2-3-4 y 5 será la solución.

Fig. 53

Construir un hexágono regular, conocido el lado l.

1.º Con el valor del lado l construimos un triángulo rectángulo, similar al de la figura 50, para obtener el punto O.
2.º Con centro en el punto O trazamos una circunferencia de radio r = 01 = 02.
3.º Con el valor del lado l cortamos sucesivamente a la circunferencia en los puntos 3-4-5-6.
4.º La unión de los puntos 1-2-3-4-5 y 6 determinarán el hexágono regular inscrito, solución del problema.

Fig. 54

Construir un heptágono regular, conocido el lado 1-2.

1.º Construir un ángulo de 30º a partir del punto 1 y levantar una perpendicular por el punto 2 al lado 1-2, que se cortarán en el punto B.
2.º Con centro en el punto 1 trazamos un arco de radio 1 B que cortará en el punto O a la mediatriz trazada al segmento 1-2.
3.º Con centro en O y radio 01 = 02 trazamos una circunferencia que circunscribe al polígono de siete lados, solución del problema.

Fig. 55

Construir un polígono regular de nueve lados (eneágono), conocido su lado (1-2).

1.º Construir el triángulo equilátero 1-2-A.
2.º Trazar la bisectriz del ángulo A-1-2 que cortará en B a la mediatriz trazada al lado 1-2.
3.º Con centro en A trazar una circunferencia de radio AB.
4.º Prolongar los lados 1A y 2A para que corten a la circunferencia anterior en los puntos E y D.
5.º El punto medio O del segmento ED es el centro de la circunferencia que circunscribe al eneágono regular de lado 1-2.

Fig.50

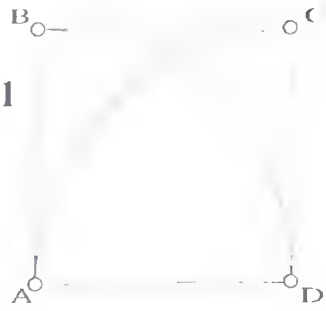


Fig.51

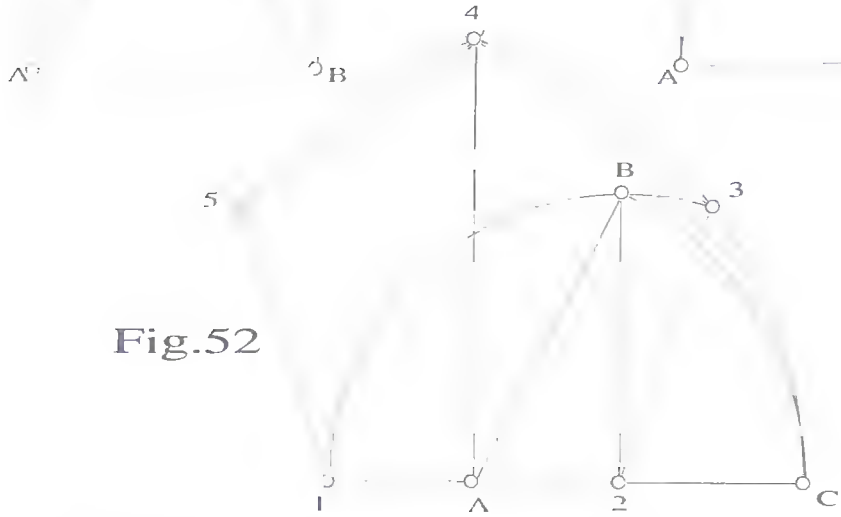


Fig.52

Fig.53

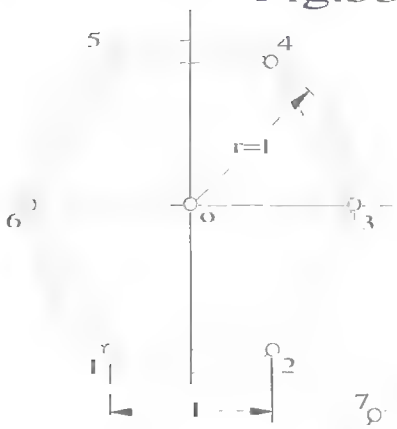
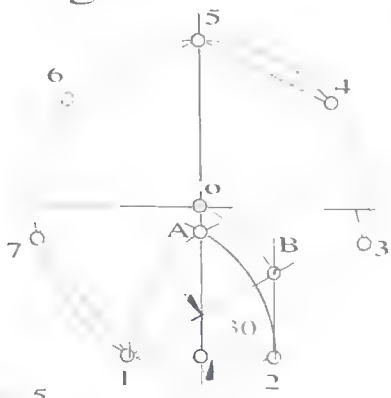


Fig.54



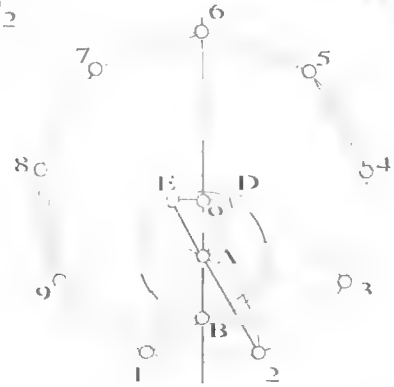


Fig.55

Amparo
JAR'23

Tangencias y enlaces

Fig. 56

Enlazar un segmento AB con una circunferencia de radio OA.

1.º Por el extremo A del segmento AB trazamos una perpendicular a éste.
2.º Sobre la perpendicular trazada por el punto A tomamos la distancia del radio = OA.
3.º El problema queda resuelto, siendo A el punto de tangencia entre el segmento AB y las circunferencias de radio OA y centro (O).

Fig. 57

Sobre cualquier figura rectangular realizar enlaces de distintos radios, localizando los puntos de tangencia.

Fig. 58

Unir los puntos extremos del segmento AC por arcos de circunferencias de distintos radios.

1.º Tomamos un punto B en el segmento dado AC.
2.º Las mediatrices de los segmentos AB y BC determinarán los centros O_1 y O_2.
3.º Con centros en O_1 y O_2 trazamos los arcos de radios O_1A y O_2B, respectivamente, que se unirán en el punto de tangencia B.

Fig. 59

Enlazar arcos de circunferencias de distintos radios, localizando sus puntos de tangencias.

Fig. 60

Enlazar por medio de un arco de circunferencia, dos rectas perpendiculares entre sí.

Fig. 61

Enlazar por medio de un arco de circunferencia, dos rectas concurrentes.

1.º Hallamos la bisectriz del ángulo formado por las rectas. (Ver Fig. 22.)
2.º Con el valor del radio de la circunferencia trazamos paralelas a los lados VB y VA del ángulo formado por las rectas, que se cortarán en el punto O_1, centro de la circunferencia.
3.º Por O_1 trazamos perpendiculares a los lados del ángulo, obteniéndose los puntos A y B.
4.º La circunferencia de radio $O_1A = O_1B$ es la solución.

Fig. 62

Enlazar por medio de arcos de circunferencia, dos rectas paralelas r y s.

1.º Trazamos una recta cualquiera t secante a las rectas dadas r y s, que la cortarán en los puntos A y B.
2.º Tomamos un punto R interior entre las rectas r y s, por el que trazaremos una recta paralela a las rectas dadas r y s.
3.º Por los puntos A y B trazamos perpendiculares a la recta trazada anteriormente, para determinar los puntos O_1 y O_2, centro de los arcos de circunferencia, solución del problema.

NOTA: Los puntos A, R y B son los puntos de tangencia.

Fig.56

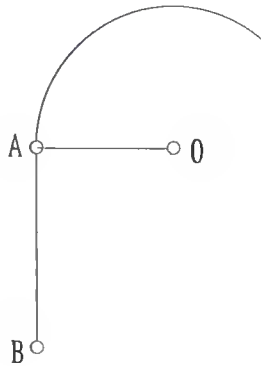
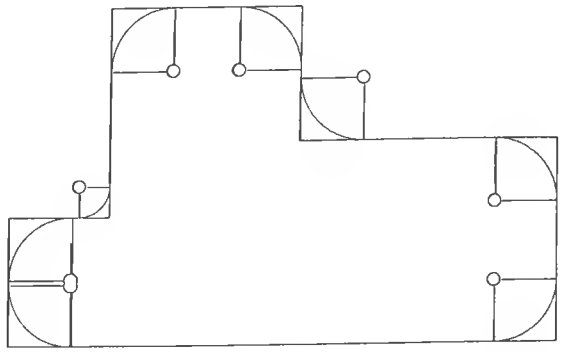


Fig.57



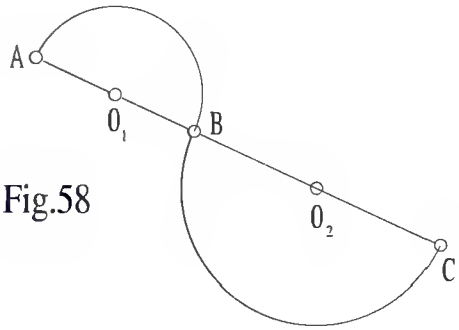


Fig.58

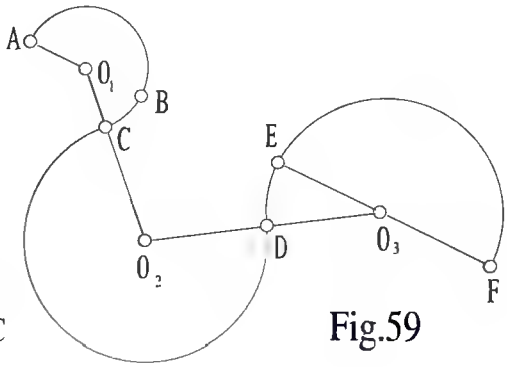


Fig.59

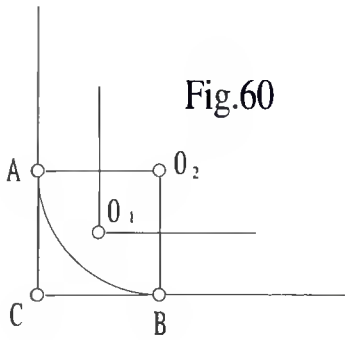


Fig.60

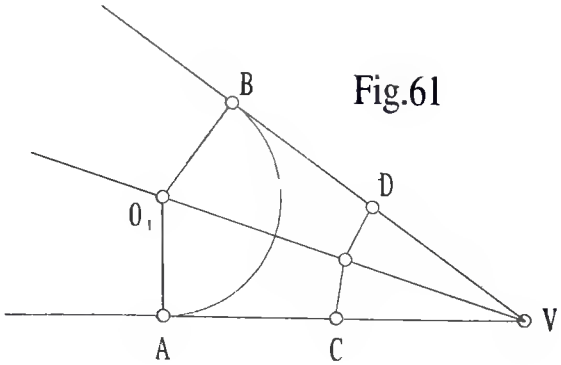


Fig.61

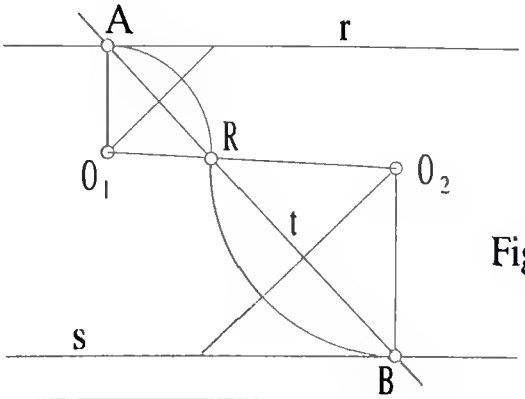


Fig.62

Fig. 63

Trazar las posibles rectas tangentes a una circunferencia dada con la condición de que sean paralelas a una reta dada t.

1.º A partir del punto O, centro de la circunferencia dada, trazamos un arco de radio r, mayor al de la circunferencia dada.
2.º El arco cortará a la recta t en los puntos A y B.
3.º Unimos el punto O, centro de la circunferencia con el punto medio del segmento AB, que cortará a la circunferencia de radio O en los puntos 1 y 2.
4.º Por los puntos 1 y 2 trazamos las rectas s y m, paralelas a la recta dada t, siendo éstas la solución al problema.
5.º Los puntos 1 y 2 son los puntos de tangencia entre la circunferencia dada y las rectas s y m, paralelas a la recta dada t.

Fig. 64

Trazar una recta tangente a una circunferencia dada con la condición de que pase por un punto P de su periferia.

1.º Trazamos una recta cualquiera que pase por el punto P y por el centro O de la circunferencia dada.
2.º Levantamos por el punto P una recta t perpendicular a la recta trazada anteriormente, siendo ésta la solución al problema.

NOTA: El punto P es el punto de tangencia entre la circunferencia y la recta t.

Fig. 65

Trazar las posibles rectas tangentes a una circunferencia dada desde un punto P exterior a ella.

1.º Unimos el punto P con el centro O de la circunferencia dada.
2.º Obtenemos el punto O_1, centro del segmento PO.
3.º Con centro O_1 y radio $O_1O = O_1P$ trazamos una circunferencia que cortará a la anterior de centro O en los puntos 1 y 2.
4.º Unimos el punto P con los puntos 1 y 2, obteniéndose las rectas T_1 y T_2, ambas tangentes a la circunferencia dada de centro O.

NOTA: Los puntos 1 y 2 son los puntos de tangencia entre las rectas y la circunferencia.

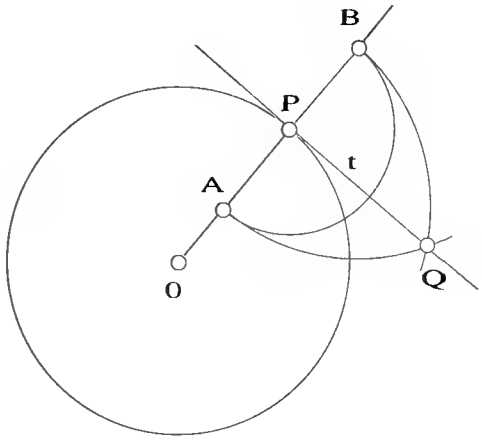


Fig.63

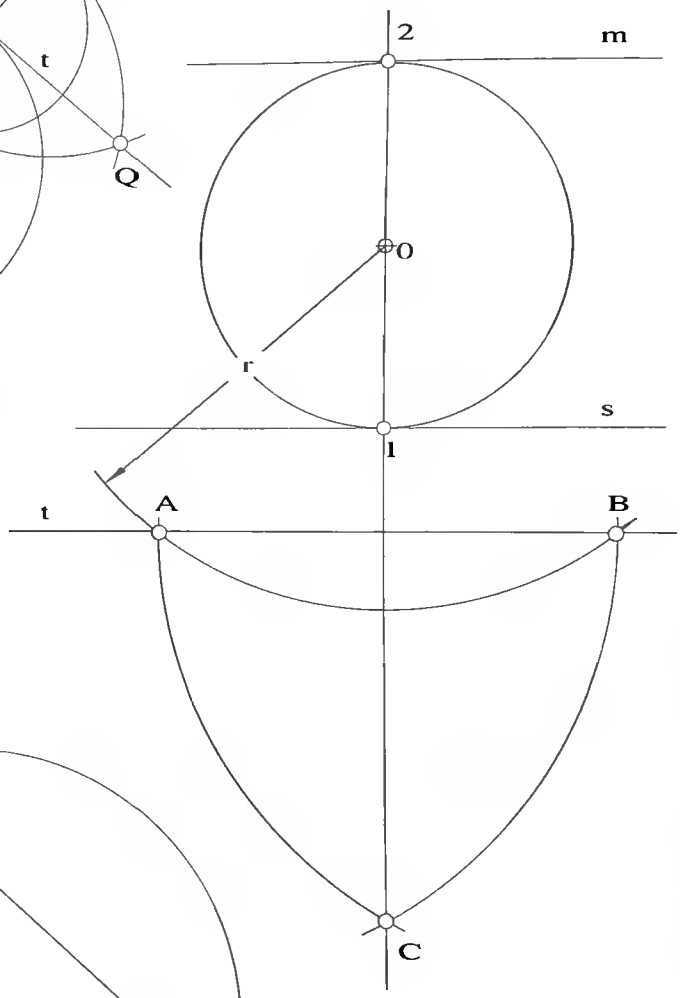


Fig.64

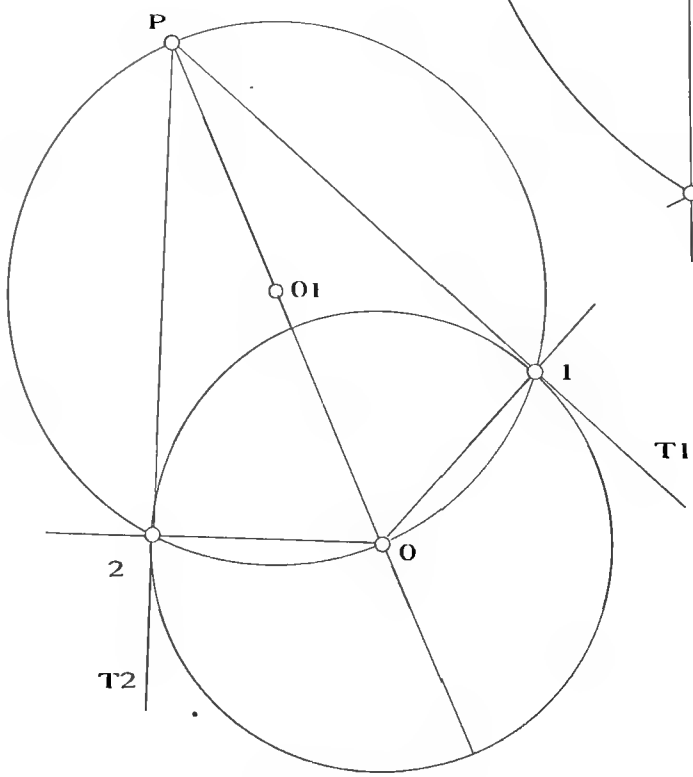


Fig.65

Fig. 66

Trazar una recta S tangente a un circunferencia dada por un punto P de ésta, desconociéndose su centro.

1.º Por el punto P trazamos un arco cualquiera de radio r_1 que cortará a la circunferencia dada en el punto A.

2.º Por el punto A trazamos un arco cualquiera de radio $r_2 = r_1$ que cortará a la circunferencia en el punto B.

3.º Con centro en el punto P y radio PB trazamos un arco que cortará al anterior en el punto Q.

4.º La unión de los puntos P y Q será la recta pedida tangente a la circunferencia dada, siendo P el punto de tangencia entre la recta y la circunferencia.

Fig. 67

Trazar las posibles rectas tangentes exteriores a dos circunferencias dadas, cuyos radios son diferentes.

1.º Trazamos las circunferencias de centro O_1 y O_2 de radios O_1A y O_2B respectivamente.
2.º Unimos los centros de las dos circunferencias por el segmento O_1 y O_2.
3.º Trazamos la mediatriz MN del segmento O_1 O_2, obteniéndose el punto O_3.
4.º Con centro en O_3 trazamos una circunferencia de radio O_3 O_1 = O_3 O_2.
5.º Con centro en O_1 trazamos una circunferencia de radio O_1 a igual a la diferencia de radios entre las dos circunferencias dadas.
6.º Las dos circunferencias trazadas en los apartados 4º y 5º se cortan en los puntos a y b.
7.º Trazamos las rectas t_1 y t_2 que unen los puntos a y O_2, así como b y O_2, respectivamente.
8.º Las rectas trazadas por los puntos O_1a - O_1b determinarán los puntos A y C en la circunferencia de radio O_1A.
9.º Las perpendiculares trazadas a las rectas aO_2 y bO_2 por el punto O_2 determinarán los puntos B y D en la circunferencia de radio O_2.
10.º La unión de los puntos A y B, así como C y D determinarán las rectas T_1 y T_2, solución del problema.

NOTA: Los puntos A, B, C y D son los puntos de tangencias entre las rectas y las circunferencias dadas.

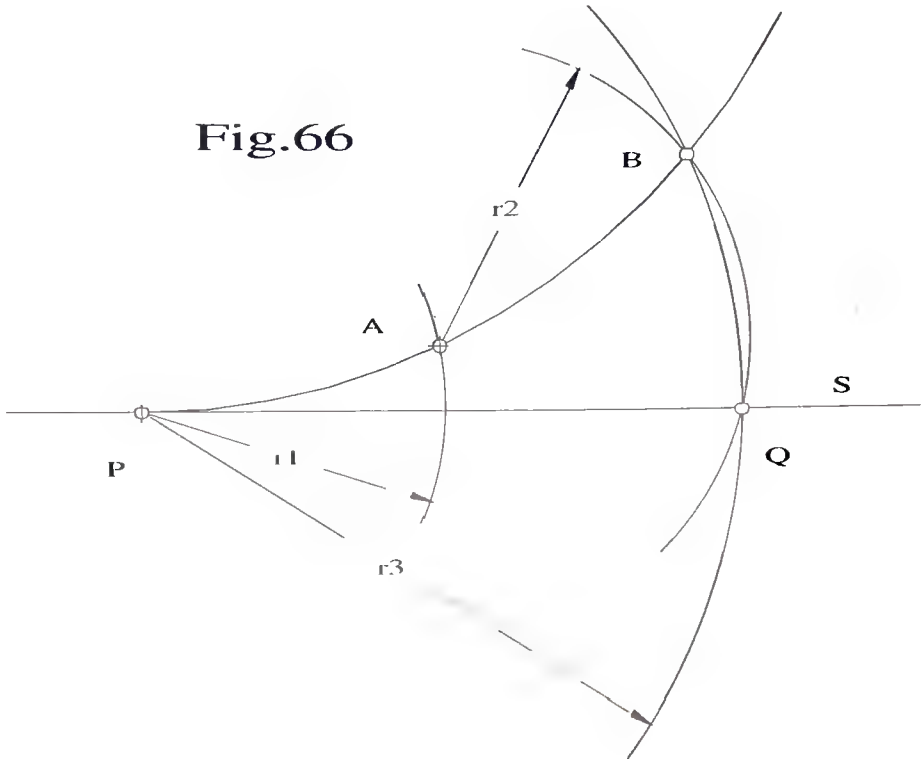


Fig.66

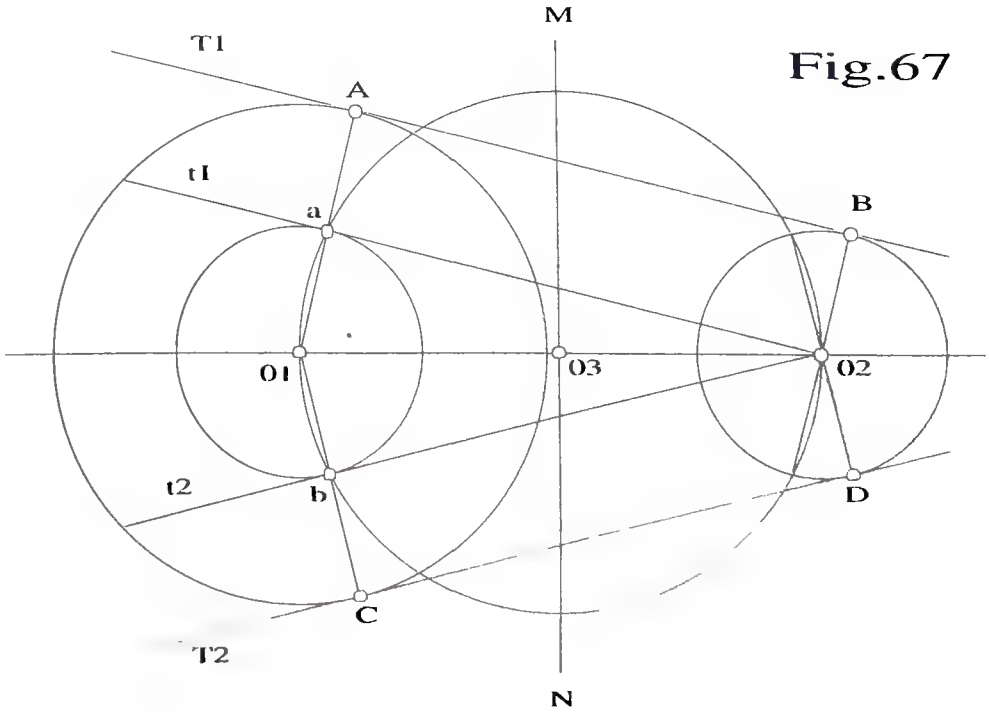


Fig.67

Fig.68

Trazar las posibles rectas tangentes interiores a dos circunferencias dadas, cuyos radios son diferentes.

1.º Trazamos las circunferencias de centros O_1 y O_2, de radios O_1A y O_2B, respectivamente.
2.º Unimos los centros de las dos circunferencias por el segmento $O_1 O_2$.
3.º Trazamos la mediatriz PQ del segmento $O_1 O_2$, obteniéndose el punto O_3.
4.º Con centro en O_3 trazamos una circunferencia de radio $O_3 O_1 = O_3 O_2$.
5.º Con centro en O_2 trazamos una circunferencia de radio O_2M, igual a la suma de los radios de las circunferencias dadas.
6.º Las dos circunferencias trazadas en los apartados 4º y 5º se cortan en los puntos M y N.
7.º Trazamos los segmentos O_1M y O_1N.
8.º Por los puntos M y N trazamos perpendiculares a los segmentos O_1M y O_1N, respectivamente, obteniéndose en la circunferencia de centro O_2 los puntos D y B.
9.º Por el punto O_1, centro de una de las circunferencias dadas, trazamos perpendiculares a los segmentos O_1M y O_1N, obteniéndose en dicha circunferencia los puntos C y A respectivamente.
10.º La unión de los puntos A y B, así como la de los puntos C y D determinan las rectas T_1 y T_2, respectivamente, solución del problema.

NOTA: Los puntos A, B, C y D son los puntos de tangencias entre las rectas y las circunferencias dadas.

Fig.69

Trazar dos circunferencias tangentes entre sí, siendo, a su vez, tangentes a dos rectas convergentes.

1.º Trazamos la bisectriz de las rectas convergentes t_1 y t_2, según el procedimiento estudiado en la Fig. 26.
2.º Conocido el radio de una de las circunferencias, por ejemplo la de centro O_1, trazamos las rectas S_1 y S_2, paralelas a t_1 y t_2 a la distancia del radio, obteniéndose el punto O_1 en la bisectriz trazada en el apartado 1º.
3.º Por el punto O_1 trazamos perpendiculares a las rectas t_1 y t_2, obteniéndose los puntos de tangencia T_1 y T_2.
4.º Trazamos las circunferencia de centro O_1 y radio $O_1 T_1 = O_1 T_3$.
5.º Trazamos el segmento MN que, siendo perpendicular a la bisectriz, pase por el punto P.
6.º Trazamos la bisectriz del ángulo formado por el segmento MN y por la recta t_2, según el procedimiento estudiado en la Fig. 22 que cortará a la bisectriz trazada en el apartado 1º en el punto O_2.
7.º Por el punto O_2 trazamos perpendiculares a las rectas t_1 y t_2, obteniéndose en éstas los puntos de tangencia T_2 y T_4.
8.º La circunferencia trazada con centro en O_2 y radio $O_2T_2 = O_2 T_4$, será la solución del problema.

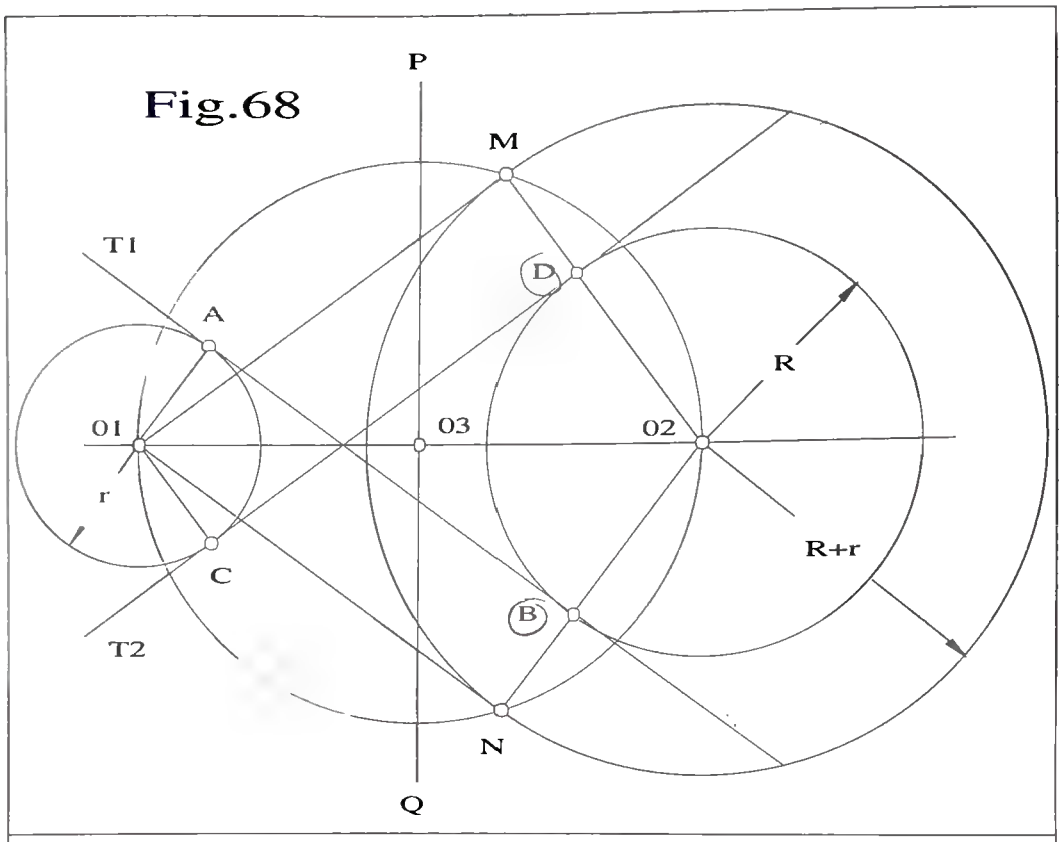


Fig.68
P
M
T1
A
D
R
01
03
02
r
C
R+r
B
T2
N
Q

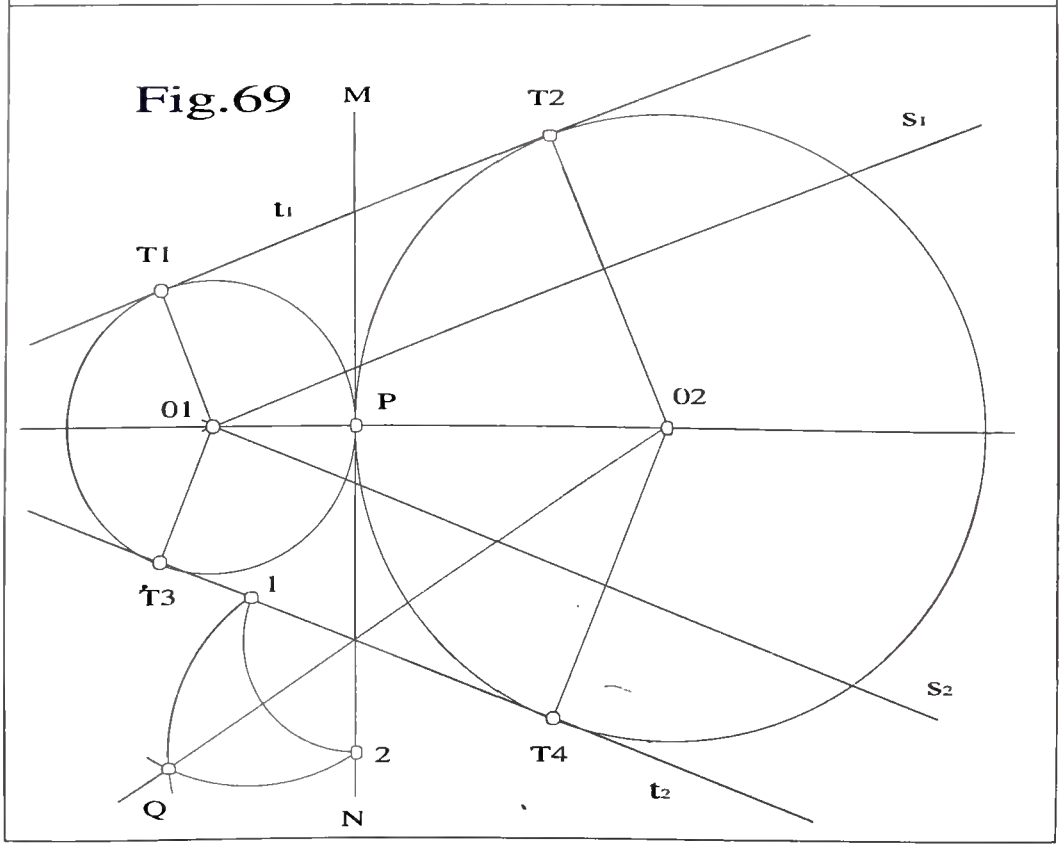


Fig.69
M
T2
S1
t1
T1
01
P
02
T3
1
S2
2
T4
t2
Q
N

Fig. 70

Enlazar dos arcos de circunferencia por un curva parabólica.

1.º Trazamos por el punto M una recta tangente a la circunferencia de centro O_1, de acuerdo con lo estudiado en la Fig. 56.

2.º Trazamos por el punto N una recta tangente a la circunferencia de radio O_2 de igual forma que la trazada en el apartado 1º.

3.º Las rectas trazadas en los apartados 1º y 2º serán los segmentos MP y NP que se cortarán en el punto P.

4.º Los segmentos MP y NP lo dividiremos en un número cualquiera de partes, en nuestro caso en 6.

NOTA: Seguir el procedimiento estudiado en la Fig. 13.

5.º Unimos el punto N con las divisiones 1-2-3-4 y 5 del segmento MP.

6.º Unimos el punto M con las divisiones 1-2-3-4 y 5 del segmento NP.

7.º Las rectas N1 con M1, N2 con M2, N3 con M3, N4 con M4 y N5 con M5 se cortarán en puntos que, unidos ordenadamente, nos darán la curva, solución del problema.

8.º Los puntos M y N serán los puntos de tangencia entre las circunferencias de radios O_1, O_2 y la curva parabólica que los une.

NOTA: En el caso de que se desconozca el centro de una de las circunferencias, pc. ejemplo, la de centro O_2, procederemos de la siguiente forma:

a) Tomamos tres puntos del arco, tales como el s, t y v (no representado en el dibujo).

b) Unimos por medio de segmentos los puntos s con t y t con v.

c) Trazamos las mediatrices de los segmentos st y tv.

d) Las mediatrices trazadas en el apartado c) se cortarán en el punto O_2, centro de la circunferencia pedida.

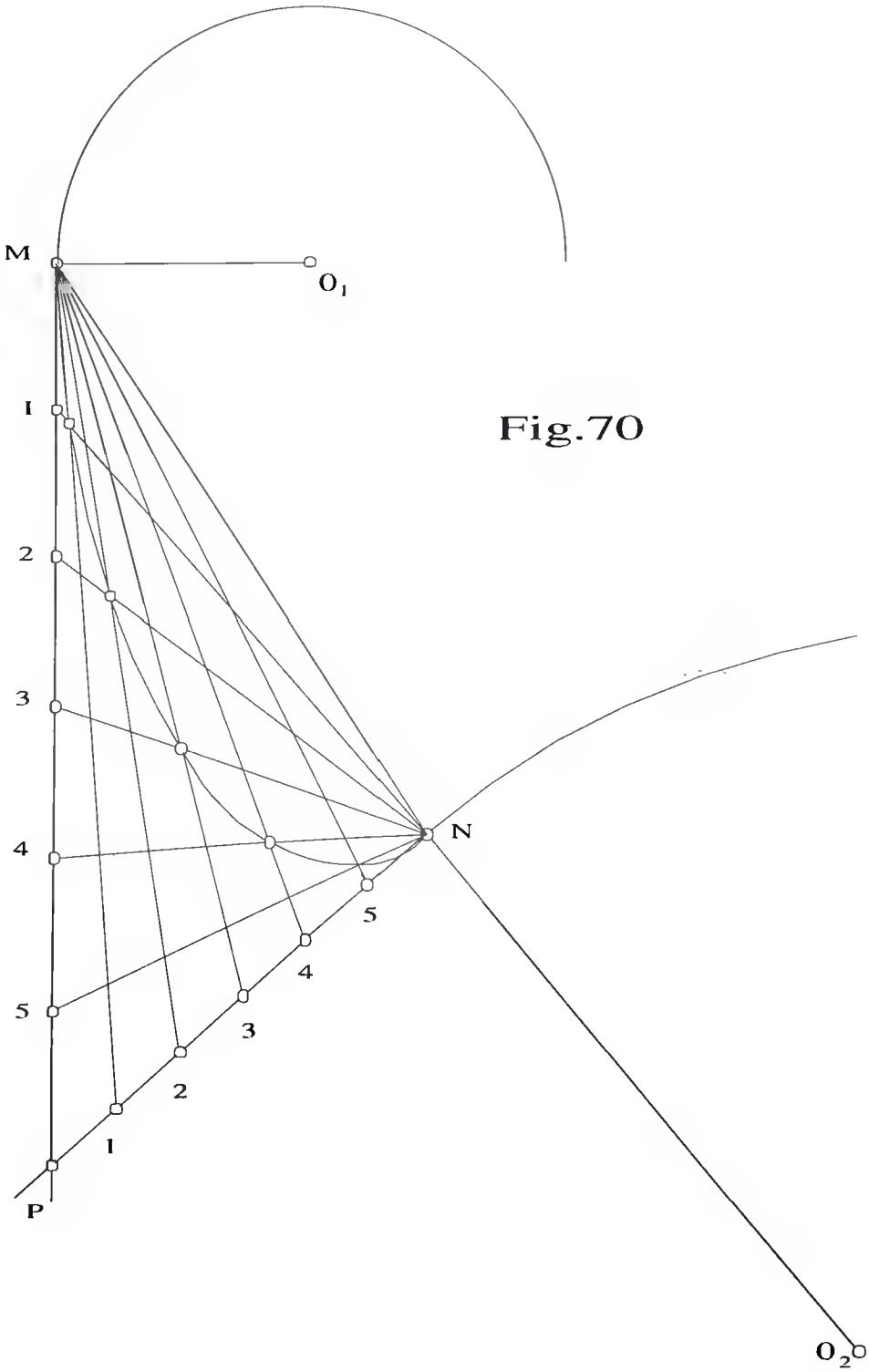


Fig.70

Fig. 71

Hallar el centro de gravedad de un triángulo cualquiera.

1.º Dado el triángulo escaleno ABC, trazamos desde sus vértices perpendiculares a sus lados opuestos, obteniéndose los puntos P, N y M.

2.º La intersección de los segmentos AP, BN y CM se cortarán en el punto O (centro de gravedad del triángulo).

NOTA: La unión de los puntos M, P y N determinan un triángulo denominado ORTICO.

Fig. 72

Trazar un triángulo complementario de otro dado.

1.º Dado un triángulo escaleno ABC, tomamos los puntos M, N y C, puntos medios de los lados AB, AC y BC, respectivamente.

2.º La unión de los puntos M, N y P determinarán el triángulo complementario del dado ABC.

Fig. 73

Trazar un triángulo cuyos lados sean tangentes a tres circunferencias dadas.

1.º Unimos los centros de las tres circunferencias dos a dos, obteniéndose el triángulo O_a O_b O_c.

2.º Por los vértices O_a O_b y O_c trazamos perpendiculares a los lados opuestos del triángulo, obteniéndose los puntos A, B y C, respectivamente.

3.º El triángulo ABC es el triángulo ortico estudiado en la Fig. 71, tangente a las tres circunferencias dadas, solución del problema.

4.º Las perpendiculares trazadas por los distintos centros de las circunferencias dadas, a las prolongaciones de los lados del triángulo ortico, determinarán los puntos de tangencia. T_a - T_b y T_c.

Fig.71

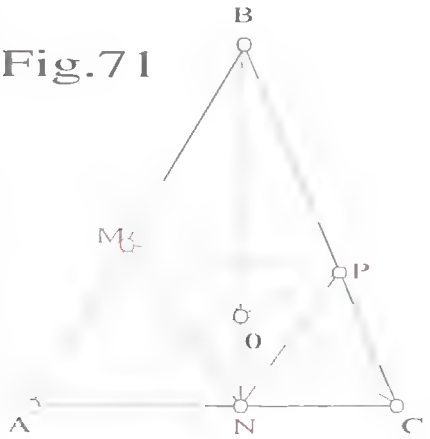
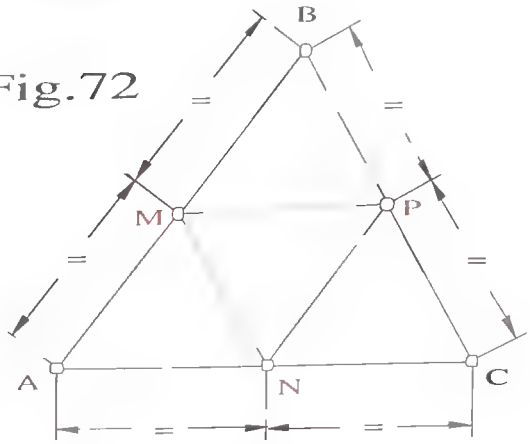


Fig.72



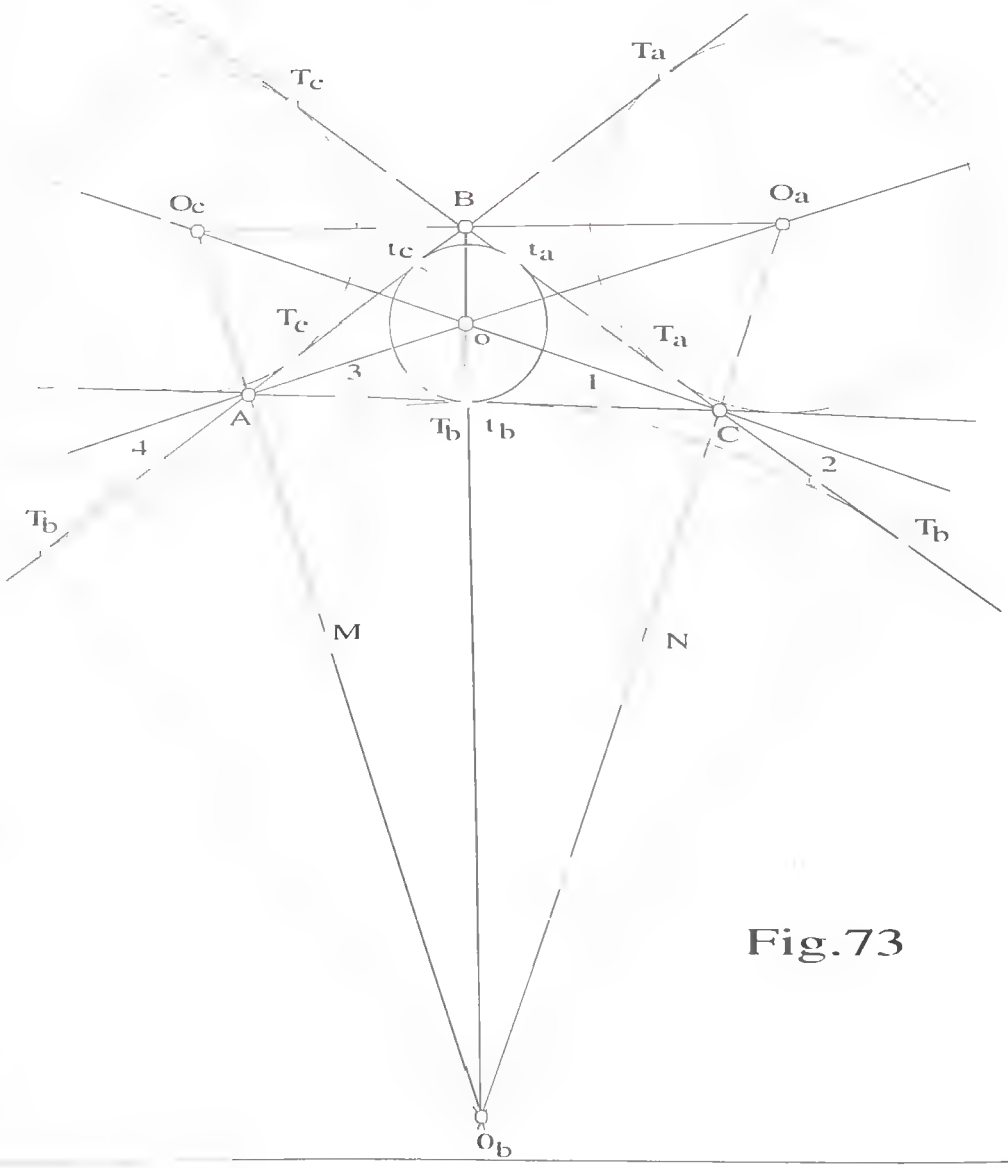


Fig.73

JAR'23

Igualdad, semejanza y equivalencia

Fig. 74

Dibujar una figura igual a otra dada.

PRIMER METODO: POR COORDENADAS

1.º Conocida la figura (imagen izquierda) limitada por los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, inscribimos a ésta en un rectángulo máximo, es decir, que pase por los puntos AF y EH.
2.º Por cada unos de los puntos de la figura dada, trazamos rectas horizontales y verticales que pasen por cada punto de la figura, cortándose en los puntos C, D, B, G, I.
3.º Reproducimos el rectángulo del apartado 1º, así como las rectas trazadas en el apartado 2º y trazamos los segmentos AB - BC - CD - ... IA, que unidos ordenadamente, nos darán una figura igual a la dada, solución del problema. (Imagen de la derecha.)

Fig. 75

Dibujar una figura igual a otra dada.

SEGUNDO METODO: POR RADIACION

1.º Conocida la figura (imagen izquierda) limitada por los puntos A, B, C, D, E, F y G, trazamos una circunferencia de centro O y radio cualquiera.
2.º Con centro en O trazamos los segmentos que unen el punto O con cada uno de los puntos de la figura dada.
3.º En la imagen derecha, hemos tomado un punto O y con radio igual al del apartado 1º, trazamos una circunferencia.
4.º Copiamos los ángulos de la figura de la izquierda con el compás, entre los radios vectores OA - OB, OB - OC... etc, en la figura de la derecha y, sobre éstos, llevamos a partir del punto O las distancias OA - OB - OC - OD - OE - OF y OG.
5.º La unión de los puntos A, B, C, D, E, D, F y G determinarán la figura igual a la dada, solución del problema.

Fig. 76

Dibujar una figura igual a otra dada.

TERCER METODO: POR COPIA DE ANGULOS.

1.º Conocida la figura (Imagen izquierda) limitada por los puntos A, B, C, D, E, F y G, trazamos un segmento con el valor de uno de sus lados, en nuestro caso AG.
2.º A partir de los puntos A y G trazamos rectas que formen los mismos ángulos y limitamos éstos por las longitudes de los distintos segmentos, es decir, AB y GF de la figura izquierda debe ser igual a AB y GF de la figura derecha.
3.º Repetimos el procedimiento con el resto de los vértices, la unión de los puntos A, B, C, D, E, F, G, y A será la solución del problema.

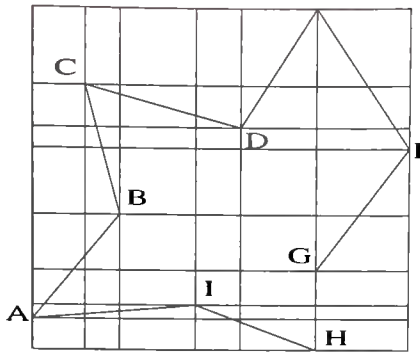
Fig. 77

Dibujar una figura igual a otra.

CUARTO METODO: TRIANGULACION.

1.º Unimos el vértice A de la figura dada (imagen de la izquierda) con los restantes puntos.
2.º A partir del punto A de la figura representada a la derecha, reproducimos los triángulos ABC - ACD - ADE - AEF y AFG, utilizando el procedimiento estudiado en la Fig. 40.

Fig. 74



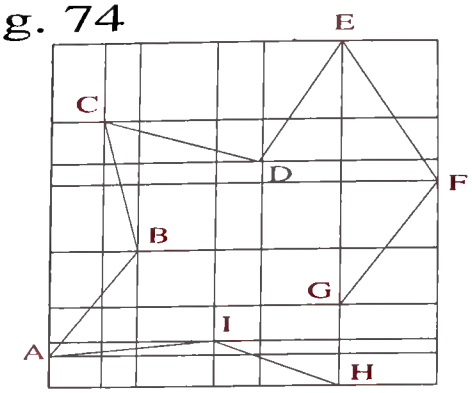
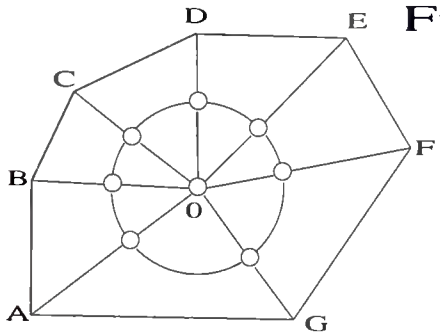


Fig. 75



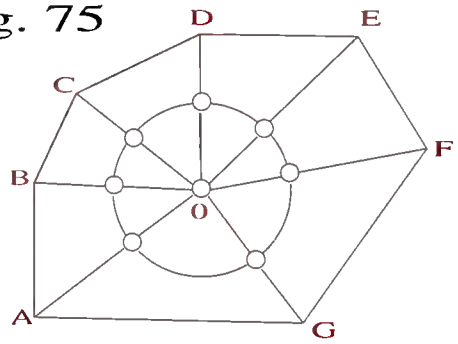
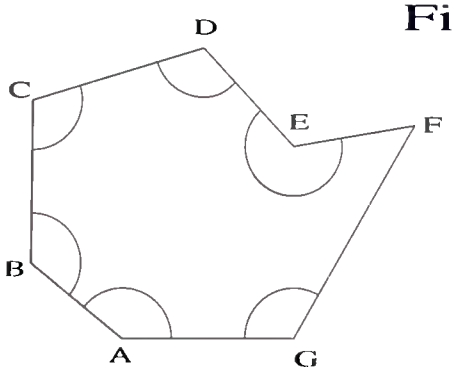


Fig. 76



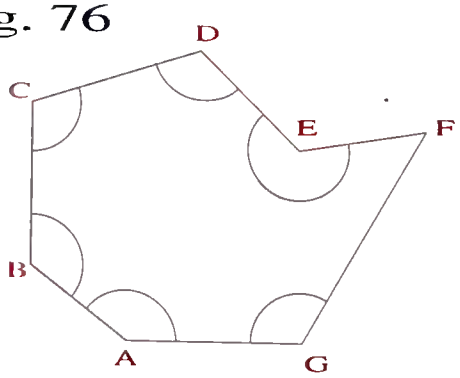
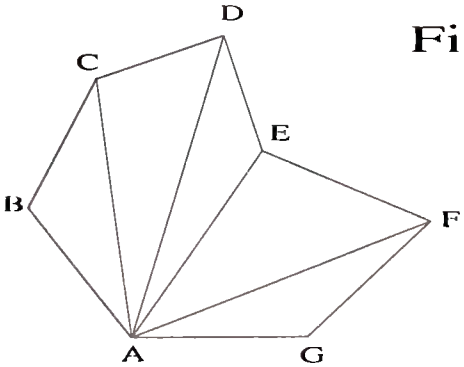


Fig. 77



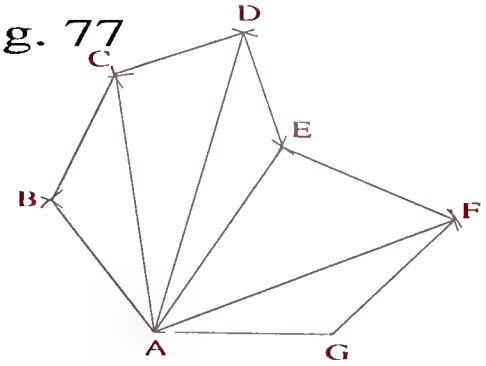


Fig. 78

Construir un polígono cualquiera directamente semejante a otro dado, a escala E = 1/2.

PRIMER METODO

1.º Trazamos un polígono cualquiera en nuestro caso es el limitado por los puntos 1-2-3 y 4.(El mayor.)
2.º Tomamos un punto cualquiera, en nuestro caso el V, que sea exterior al polígono dado.
3.º Unimos el punto P con los vértices 1-2-3 y 4 del polígono dado.
4.º Al ser nuestra escala E = 1/2, hallamos la mediatriz de cualquiera de los segmentos V1 - V2 - V3 ó V4, en nuestro caso de V1, considerando V1 = X, tomaremos a partir de V la distancia x/2 (NOTA: si la escala fuera E = 1/3 ó 1/4 ó 1/5, tomaríamos como valores x/3, x/4, x/5, respectivamente).
5.º Trazamos paralelas a los segmentos 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5, tomando como punto de origen, en nuestro caso, el 1 que cortarán a los rayos vectores V1 - V2 - V3 y V4 en los nuevos puntos 1-2-3 y 4.
6.º La unión de los nuevos puntos 1-2-3 y 4 determinará el polígono pedido semejante al dado, siendo su razón de semejanza = 1/2. (Polígono menor.)

Fig. 79

Construir un polígono cualquiera directamente semejante a otro dado a escala E = 4/7.

1.º Dado el polígono A"B"C"D"E", dividimos uno de sus lados, en nuestro caso el A"E", en un número de partes igual al denominador de la escala. (Utilizar el procedimiento estudiado en la Fig. 13.)
2.º El lado del polígono A"E" quedará dividido en siete partes representadas por los puntos 1-2-3-4-5-6 y 7.
3.º Por la división que corresponda al numerador de la escala, en nuestro caso la cuarta, trazamos una paralela al lado E"D" del polígono dado, obteniéndose el D en el segmento A"D".
4.º A partir del punto D trazamos una paralela al lado C"D" del polígono dado, obteniéndose el punto C.
5.ª Repetimos los pasos anteriores para obtener el punto B.
6.º La unión ordenada de los puntos A" B C D y E nos dará la imagen del polígono directamente semejante al dado, cuya razón de semejanza es igual a 4/7.

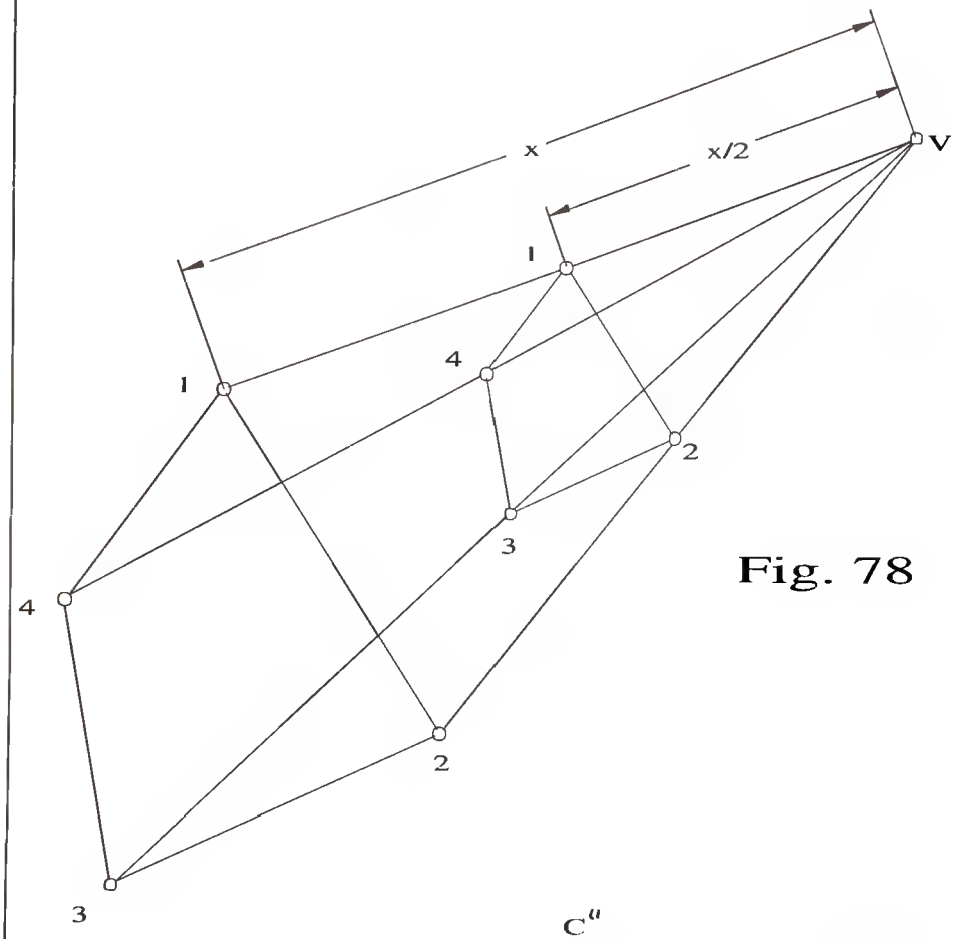


Fig. 78

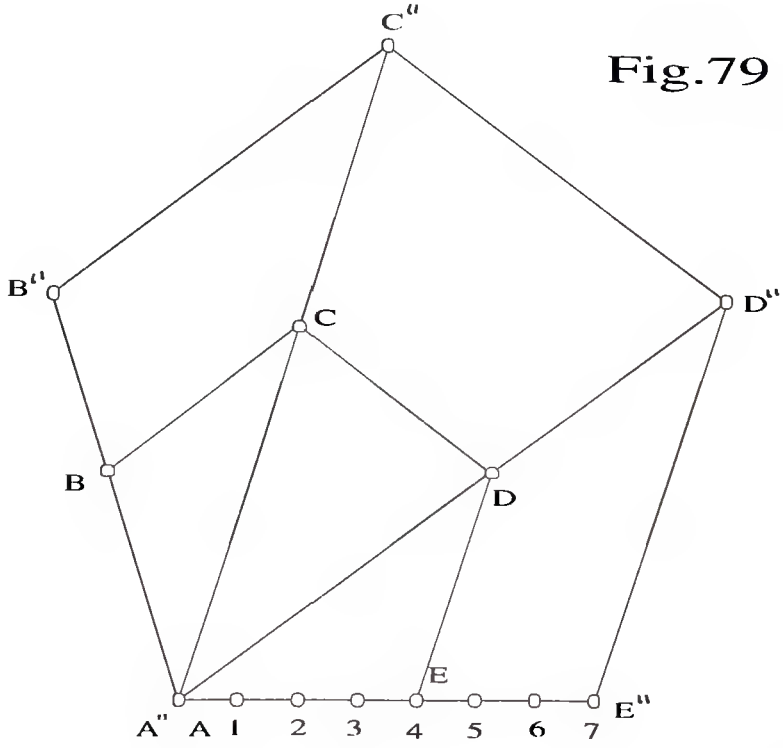


Fig.79

Fig. 80

Construir un polígono cualquiera inversamente semejante a otro dado, a una escala menor.

1.º Dado el polígono A B C D y un punto O exterior, trazamos rectas que pasen por el punto (O) y los vértices A B C y D del polígono dado.
2.º Prolongamos las rectas AO - BO - CO y DO.
3.º Sobre cualquier recta, en nuestro caso la AO, tomamos un punto arbitrario tal como el (a).
4.º Por a trazamos la paralela al lado del polígono dado AD, obteniéndose el punto d en la recta OD.
5.º A partir del punto d y siguiendo el mismo procedimiento, obtendremos el punto (c) y así sucesivamente obtendremos el punto (d) y retornaremos al (a).

NOTA: Los polígonos inversamente semejantes a otros dado pueden ser menores, iguales o mayores al dado, en razón a la relación que exista entre los puntos OA y Oa:

a) Cuando OA > Oa polígono menor.
Cuando OA = Oa polígono igual.
Cuando OA < Oa polígono mayor.

b) La relación entre OA y Oa determinará la escala, como se indicó en las Fig. 78 y Fig. 79, pudiendo éstas ser de ampliación o de reducción, según el numerador sea mayor o menor que el denominador, respectivamente.

Fig. 81

Dado un triángulo cualquiera, construir triángulos distintos que sean equivalentes, es decir, que tengan el mismo área.

1.º Dado un triángulo cualquiera de vértices MNB, trazamos la recta t paralela a su base MN por el vértice B.
2.º Cualquier punto de la recta t, tales como el A o el C, unidos con los vértices M y N, determinarán triángulos del mismo área que el MNB.

NOTA: La base de los tres triángulos es la misma = MN y la altura (h) es común para los tres triángulos.

Fig. 82

Dado un cuadrado MNQP, trazar triángulos que sean equivalentes al cuadrado dado.

1.º Con centro en el punto O, mediatriz del lado MN del cuadrado dado, trazamos un arco de radio OP.
2.º El arco cortará en los puntos A y B a las prolongaciones del lado MN del cuadrado dado.
3.º Con centro en N y radio NB, trazamos un arco que cortará al lado NQ del cuadrado dado en el punto C.
4.º Con centro en C y radio CN trazamos el arco de radio r_2 que cortará a la prolongación del lado NQ del cuadrado dado en el punto D.
5.º Por el punto D trazamos una paralela al lado MN del cuadrado dado.
6.º Cualquier punto, tales como el S o el T, unidos con los puntos A y N, definirán triángulos equivalentes al cuadrado dado, es decir, de igual área, solución del problema.

Fig. 80

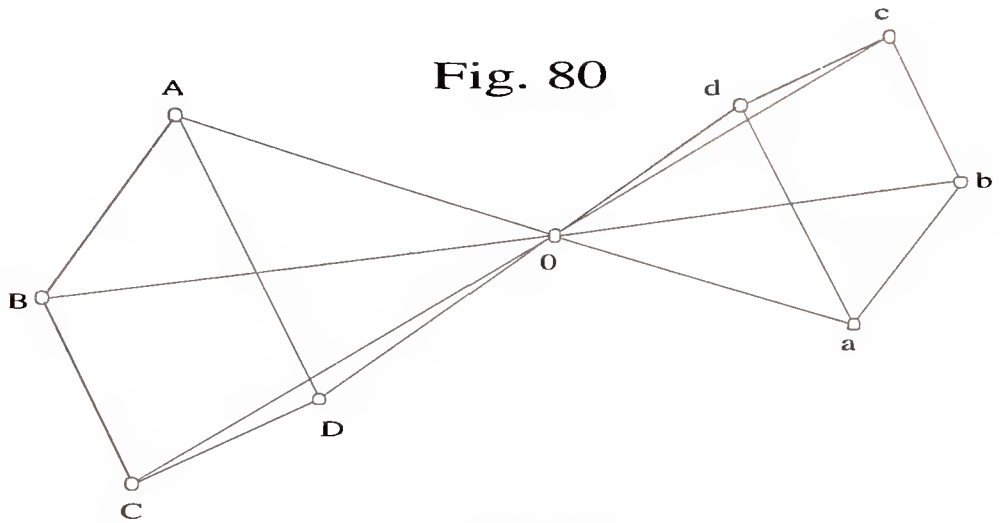


Fig. 81

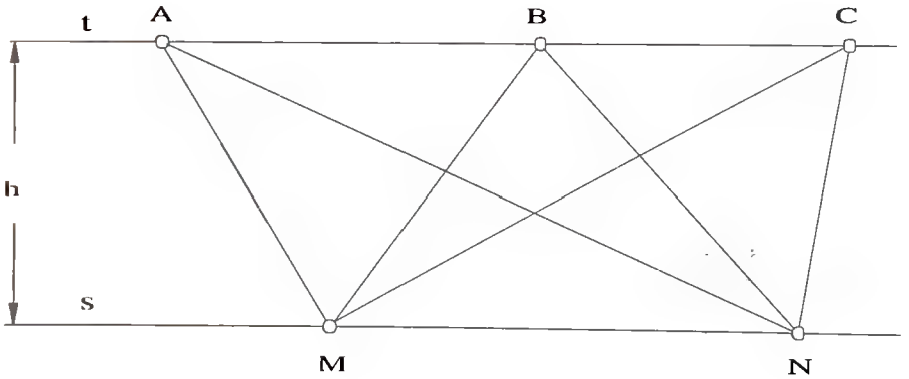


Fig. 82

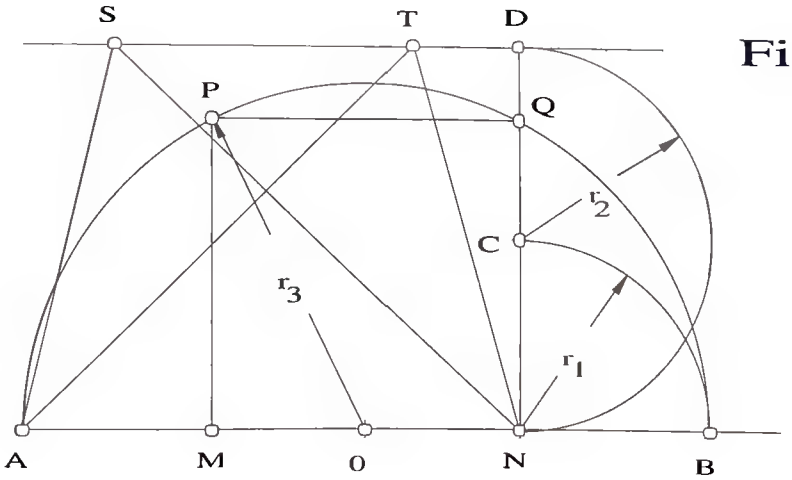


Fig. 83

Trazar un círculo cuya superficie sea equivalente a la de una elipse.

1.º Con centro en el punto O, intersección de los diámetros de la elipse, trazamos un arco de radio r que cortará al eje MN en el punto c. (r = diámetro menor de la elipse).
2.º Obtenemos el punto D mediatriz del segmento CN.
3.º Con centro en el punto D y con radio R_1 = DN = DC, trazamos otro arco que cortará al eje AB en el punto P.
4.º Con centro en el punto O y con radio R_2 = OP, trazamos una circunferencia, siendo ésta la solución del problema.

Fig. 84

Trazar círculos cuyas superficies sean doble, triple o cuádruple de otro dado.

1.º Dada la circunferencia de centro O_1, tangente a una recta, trazamos a partir de O_1 la perpendicular a dicha recta, obteniéndose el punto M.
2.º Con centro en el punto M y radio MN, trazamos un arco que cortará a la recta en el punto A.
3.º Con centro en el punto A, trazamos un arco de radio AM que cortará a la recta en el punto B.
4.º Siguiendo los procedimiento anteriores, encontraremos sobre la recta los puntos C, D, etc.
5.º Trazamos un semicírculo de diámetro MC y, desde el punto B, trazamos la perpendicular a la recta, obteniéndose el punto de intersección P. La mediatriz del segmento BP es el punto O_2, centro del círculo cuya área es doble de la dada de centro O_1.
6.º Aplicando el mismo procedimiento estudiado en el punto 5º, podemos obtener la circunferencia de centro O_3, cuya superficie es triple de la dada.

Fig. 85

Trazar cuadrados, cuyas superficies sean dobles, triples, etc., de otro dado.

1.º El cuadrado dado es el limitado por los vértices M, M, P y Q.
2.º Prolongamos el lado de la base ML.
3.º A partir de N y sobre el lado MM transportamos el valor del lado MN = AP = PQ = NQ, obteniéndose los puntos A, B, D y D.
4.º Trazamos la semicircunferencia de diámetro AB y por el punto A levantamos una perpendicular a la prolongación del lado MN que cortará a la semicircunferencia en el punto G. (El segmento AG será el valor del lado del cuadrado cuya superficie es doble que la del cuadrado dado).
5.º Siguiendo el procedimiento estudiado en el apartado 4.º obtendremos los segmentos BF y CE, lados de los cuadrados cuyas superficies son triple y cuádruple del cuadrado dado.

Fig. 83

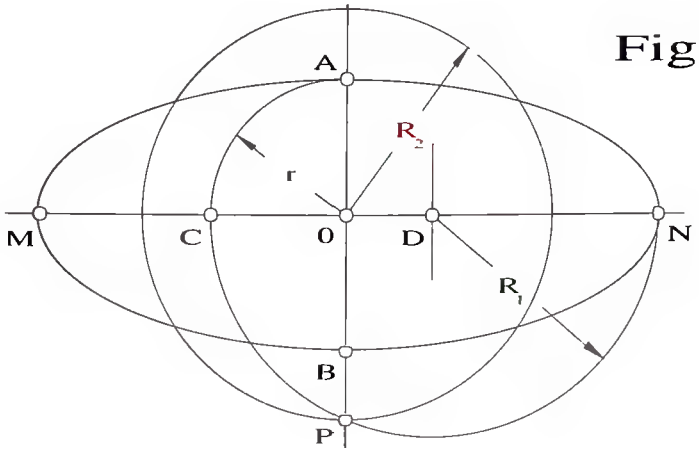


Fig. 84

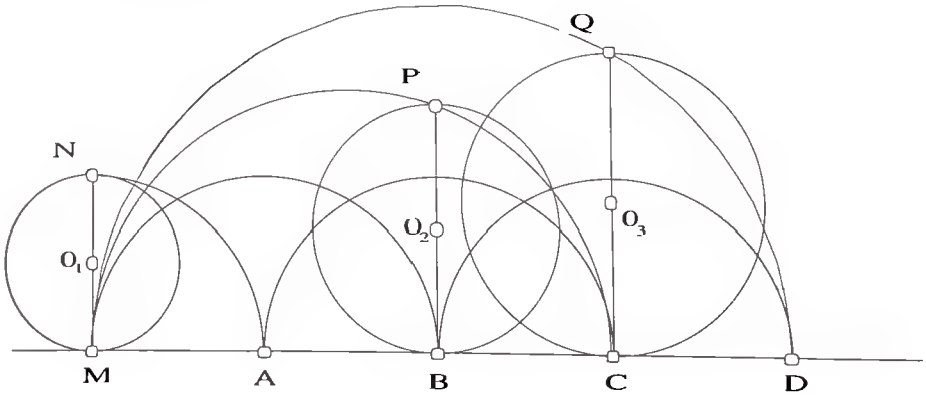
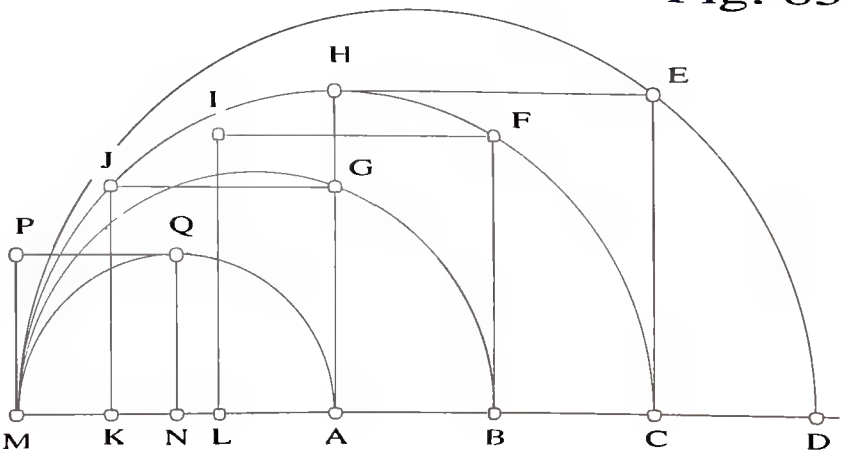


Fig. 85



JAR'23

Ovalos, ovoides y arcos

Fig. 86

Trazar un óvalo, conociéndose su eje mayor.

PRIMER METODO

1.° Sobre una recta cualquiera, determinamos dos puntos, tales como el M y el N.

2.º Dividimos el segmento MN en tres partes iguales, utilizando el sistema explicado en la Fig. 13, obteniéndose los puntos O_1 y O_2.

3.° Con centro en el punto O_1, trazamos la circunferencia de radio $O_1M = O_1 O_2$.

4.° Con centro en el punto O_2, trazamos la circunferencia de radio $O_2N = O_2 O_1$.

5.º Las circunferencias trazadas en los apartados 3º y 4º se cortan en los puntos A y B.

6.º Trazamos las rectas que pasan por los puntos AO_1 y BO_1, obteniéndose en la circunferencia de centro O_1 los puntos C y D, respectivamente.

7.º Trazamos las rectas que pasan por los puntos AO_2 y BO_2, obteniéndose en la circunferencia de centro O_2 los puntos F y E, respectivamente.

8.º Con centro en los puntos B y A con radios BD = BE y AC = AF, respectivamente, trazamos arcos que serán tangentes a las circunferencias de centros O_1 y O_2.

NOTA: Los puntos C, D, E y F serán los puntos de tangencia. La curva que pasa por los puntos M, D, E, N, F y C es un óvalo, solución del problema.

Fig. 87

Trazar un óvalo, conociéndose su eje mayor.

SEGUNDO METODO

1.º Sobre una recta cualquiera, determinamos dos puntos, tales como el M y el N.

2.º Dividimos el segmento MN en cuatro partes iguales, pudiéndose utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en las Figs. 1, 2, 13, etc., obteniéndose los puntos A, O y B.

3.º Con centro en el punto O y radio OA = OB, trazamos una circunferencia que cortará a la perpendicular levantada por el punto O al segmento MN en los puntos G y H.

4.° Trazamos las rectas GA - HA - GB y HB, que debemos prolongarlas.

5.° Con centros en los puntos A y B, trazamos arcos de radios AM y BN, respectivamente, que cortarán a las prolongaciones de las rectas trazadas anteriormente en los puntos C, D, E y F.

6.º Con centros en los puntos H y G, trazamos arcos de radio HC = HE y GD = GF, respectivamente, que también cortarán a las prolongaciones de las rectas trazadas en el apartado 4º.

7.º La curva unión de los puntos M, C, I, E, N, F, J, D y M nos dará el óvalo pedido, solución del problema.

NOTA: Los puntos C, D, E y F son los puntos de tangencia de las cuatro curvas y los puntos I y J pertenecen al diámetro menor del óvalo, perpendicular al diámetro mayor, que paso por su punto medio.

Fig. 86

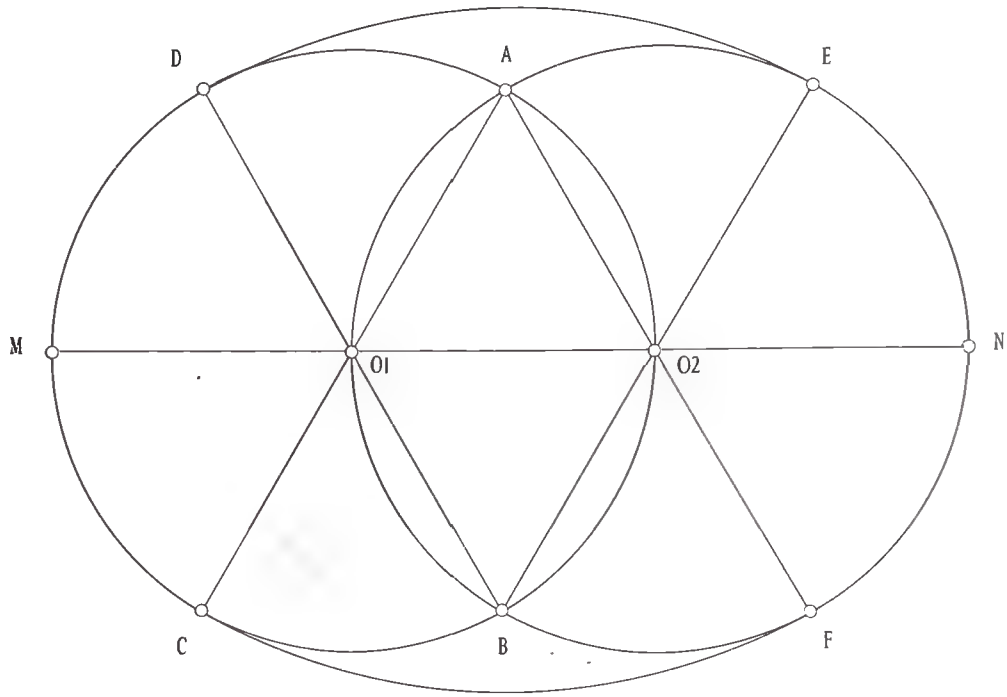


Fig. 87

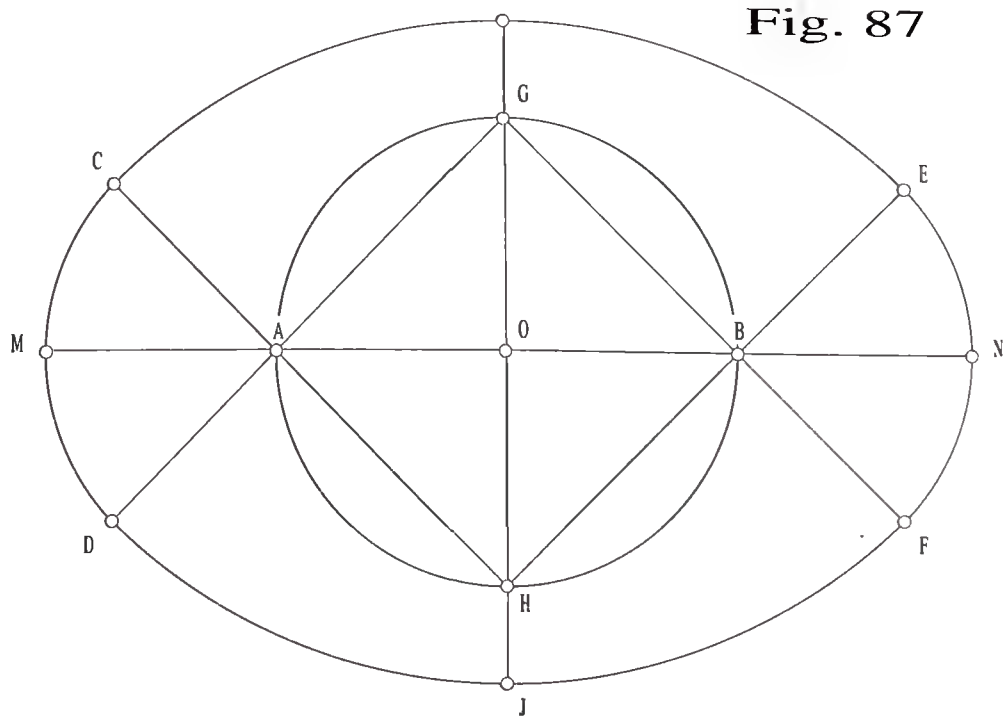


Fig. 88

Trazar un óvalo, conociéndose su eje menor.

1.º Sobre una recta cualquiera, tomamos un punto O_1.
2.º Con centro en el punto O_1, trazamos una circunferencia de radio igual a la mitad del eje menor del óvalo, que cortará a la perpendicular trazada por O_1 al eje mayor en los puntos A y B, y al eje mayor en los puntos O_2 y O_3.
3.º Con centros en A y B y radio AB, trazamos arcos que cortarán a la prolongación de los segmentos AO_2 - AO_3 - BO_2 y BO_3 en los puntos D, F, C y E, respectivamente.
4.º Con centro en los puntos O_2 y O_3 y con radios $O_2C = O_2D$, así como $O_3E = O_3F$, respectivamente, trazamos arcos de circunferencia que cortarán a las prolongaciones de los segmentos trazados anteriormente en los puntos D, F, C y E.
5.º La unión de los puntos M, C, A, E, N, F, B, D y N determinarán el óvalo, solución del problema, siendo los puntos C, D, E y F los puntos de tangencia de las cuatro curvas.

Fig. 89

Trazar un óvalo inscrito en un rombo dado.

1.º Supuesto el rombo dado de vértices A, M, B, N, trazamos, a partir de cada uno de sus vértices, perpendiculares a sus lados opuestos, obteniéndose los puntos D, F, C y E.
2.º Los segmentos AD y BC se cortan en el punto O_1 de la diagonal MN del rombo, mientras que los segmentos AF y BE se cortan en el punto O_2 de la misma diagonal.
3.º Siguiendo el mismo procedimiento de los ejercicios anteriores, haciendo centro en los puntos A, B, O_1 y O_2 trazaremos arcos de circunferencia que determinarán el óvalo, solución al problema.

Fig. 90

Trazar un óvalo, conociéndose su eje mayor MN y su eje menor AB.

1.º Trazamos dos ejes perpendiculares entre sí, MN y AB, que se cortarán en el punto O_1.
2.º Con centro en O_1 y radio O_1M, trazamos un arco que cortará a la prolongación del eje menor O_1-A en el punto G.
3.º Unimos los puntos M y A.
4.º Con centro en el punto A y radio AG, trazamos un arco que cortará al segmento trazado anteriormente en el punto F.
5.º Trazamos una perpendicular por el punto medio del segmento MF, que cortará a la prolongación del eje menor AB en el punto O_5 y al eje mayor en el punto O_2.
6.º Los puntos O_4 y O_3 son simétricos de los anteriores, respecto a sus ejes.
7.º Los puntos O_2, O_3, O_4 y O_5 son los centros de las cuatro curvas que definen el óvalo, solución del problema.
8.º El punto E y sus simétricos respecto a los ejes AB y ME, definirán los puntos de tangencia.

Fig. 88

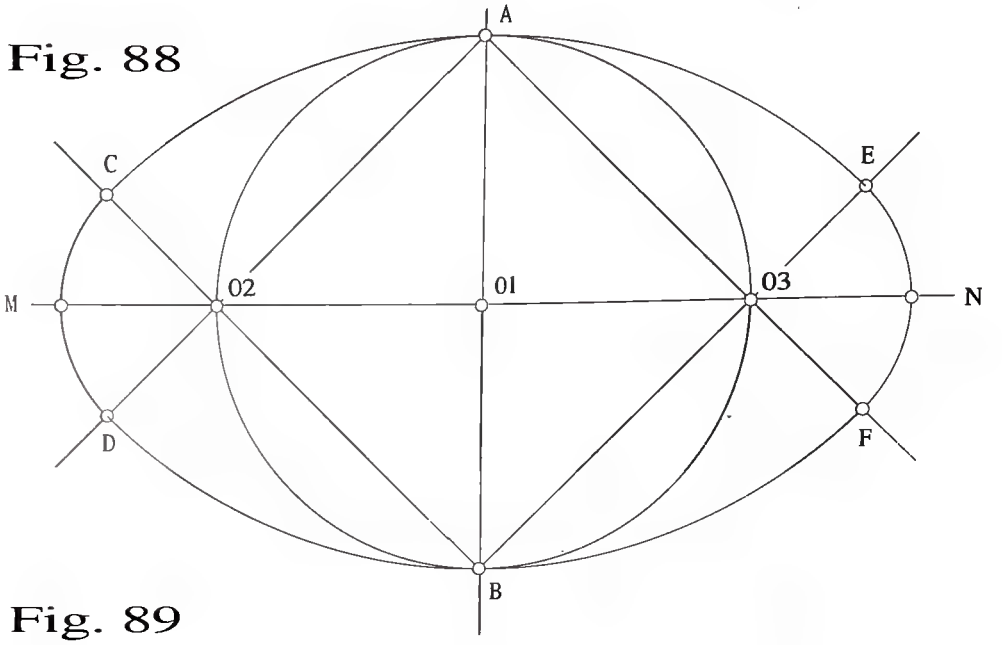


Fig. 89

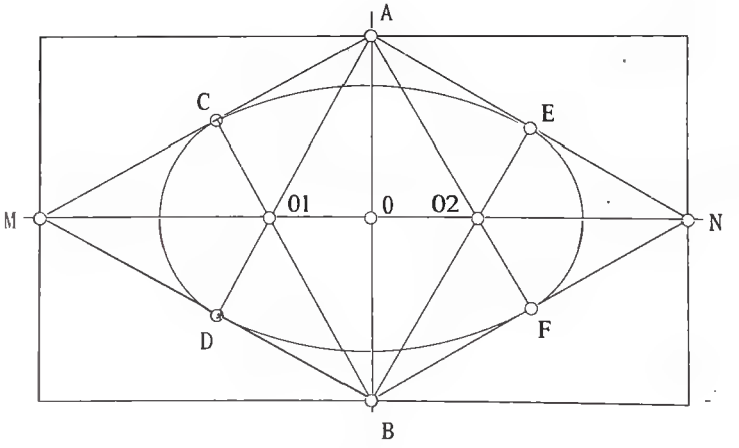


Fig. 90

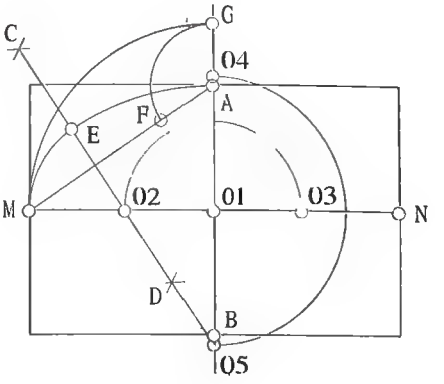


Fig. 91

Trazar un ovoide, conociéndose su eje mayor (AD).

1.º Trazamos dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortarán en el punto O_1.
2.º A partir del punto O_1 y sobre la recta horizontal, tomamos dos distancias $O_1$1 y 1A, cada una de ellas igual a AD/6, obteniéndose el punto A.
3.º A partir del punto O_1 y bajo la recta horizontal trazada en el punto 1º, tomamos cuatro distancias $O_1$3, 3-4, 4-5 y 5-6, cada una de ellas igual a AD/6, obteniéndose el punto D.
4.º Con centro en el punto O_1 y radio O_1D, trazamos un arco de circunferencia que cortará a la recta horizontal trazada en el apartado 1º en los puntos M y N.
5.º Unimos los puntos M y 5 así como los puntos N y 5 debiéndose prolongar.
6.º Los centros de los cuatro arcos que componen el ovoide serán los puntos M N O_1 y 5, siendo el valor de sus respectivos radios MC - NB - O_1 A y 5D .

Fig. 92

Trazar un ovoide, conociéndose su eje menor (AB).

1.º Trazamos una circunferencia de centro O_2, cuyo diámetro sea igual a AB.
2.º Trazamos sus dos ejes perpendiculares entre sí, AB y MC, que prolongaremos.
3.º Unimos por una recta, los puntos A y C, así como los B y C, que también prolongaremos.
4.º Con centro en los puntos A y B, trazamos arcos de radio igual a AB, que cortarán a las prolongaciones de las rectas AC y BC en los puntos E y D, respectivamente.
5.º Con centro en el punto C y radio CD = CE, trazamos el arco DNE.
6.º La solución del problema será la curva cerrada que pasa por los puntos M, A, D, N, E, B y M siendo A, D, E y B sus puntos de tangencias.

Fig. 93

Trazar un ovoide, conociéndose sus dos ejes.

1.º Trazamos una circunferencia de centro O_1, cuyo radio O_1A sea igual al semieje menor.
2.º A partir del punto O_1, trazamos dos ejes perpendiculares entre sí
3.º A partir de M y sobre el eje horizontal trazado anteriormente, tomamos la dimensión del eje mayor, obteniéndose el punto N.
4.º A partir del punto N y sobre el eje anterior, tomamos una distancia NG arbitraria, con el valor que queremos tenga el arco menor. (Tiene infinitas soluciones, según el valor de NG.) Al mismo tiempo, la misma distancia NG la transportamos sobre el eje O_1A, desde el punto A hacia el O_1, obteniéndose el punto F y su simétrico J.
5.º Unimos los puntos F y J con el G, y por el segmento FG trazamos su mediatriz D, que cortará a la prolongación del eje menor en el punto B.
6.º El punto B y su simétrico, respecto al eje mayor MN , así como los puntos O_1 y G, determinarán los centros de los cuatro arcos de la curva, siendo los puntos H, I, A y su simétrico, los puntos de tangencia.

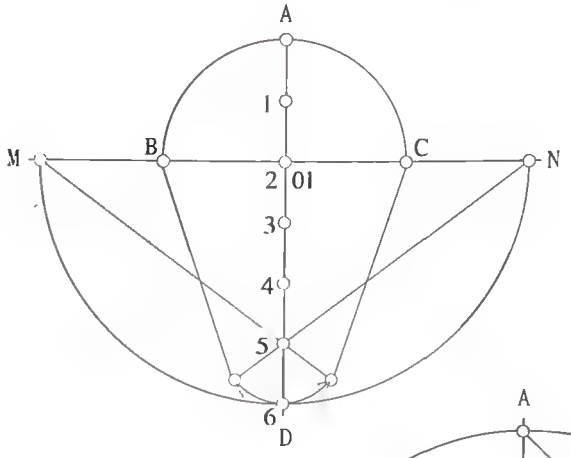


Fig. 91

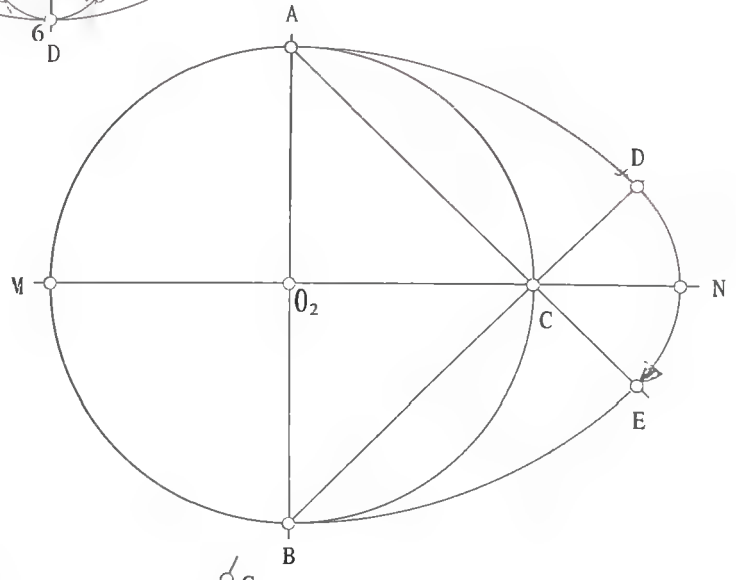


Fig. 92

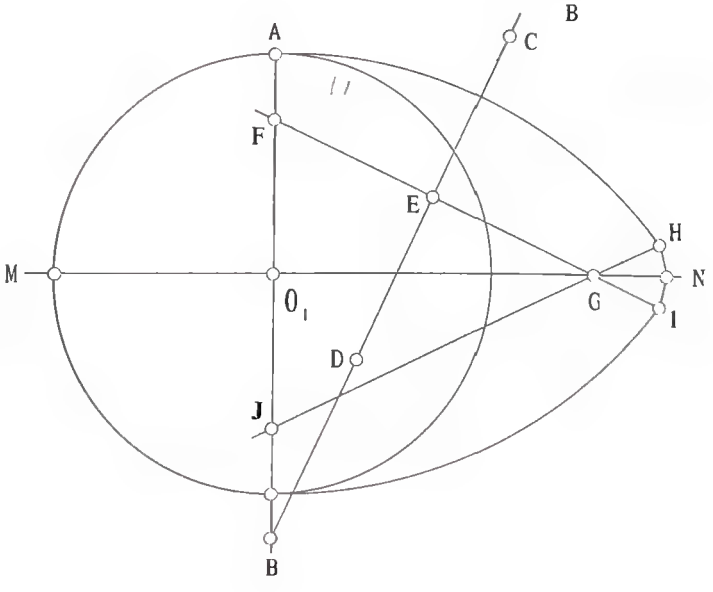


Fig. 93

JAR'23

Elipse

Fig. 94

Determinar los focos de una elipse, conocidos sus ejes.

1.º Sean MN y PQ dos ejes perpendiculares de una elipse, que se cortan en el punto O.

2.º La distancia entre los puntos M y N la denominaremos eje real y la designaremos como 2a.

3.º La distancia entre los puntos P y Q la denominaremos eje imaginario y los designaremos como 2b.

4.º Para obtener los focos F_1 y F_2 en el eje real, trazaremos un arco con centro en P o Q, en nuestro caso en P, con radio igual a la mitad del eje real MN = a que cortará a dicho eje en los puntos F_1 y F_2 (focos de la elipse).

5.º La distancia entre los focos F_1 y F_2 la designaremos como 2C.

Fig. 95

Trazar una elipse, conociéndose sus dos diámetros.

PRIMER METODO: POR PUNTOS

1.º Sean MN y PQ sus diámetros perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto O.
2.º Siguiendo el procedimiento estudiado en la Fig. 94, obtenemos los focos F_1 y F_2.
3.º Tomamos de forma arbitraria los puntos 1-2-3-4, etc., entre el foco y el centro (O) de la elipse.
4.º Con centro en F_1 y radio M1 se traza un arco que cortará al trazado con centro en F_2 y radio N1 en el punto 1.
5.º Con centro en F_1 y radio M2 se traza un arco que cortará al trazado con centro en F_2 y radio N2 en el punto 2.
6.º Repetimos las operaciones similares a las explicadas en los apartados 4º y 5º, obteniéndose los puntos 3, 4, etc.
7.º Los puntos obtenidos serán simétricos en cada cuadrante, respecto a los ejes.
8.º La unión del conjunto de los puntos trazados en cada cuadrante, determinarán una curva cerrada y plana llamada "Elipse".

NOTA: La suma de las distancias de los puntos 1, 2, 3, etc., de la periferia de la elipse a los focos F_1 y F_2. siempre será igual al valor MN = 2a.

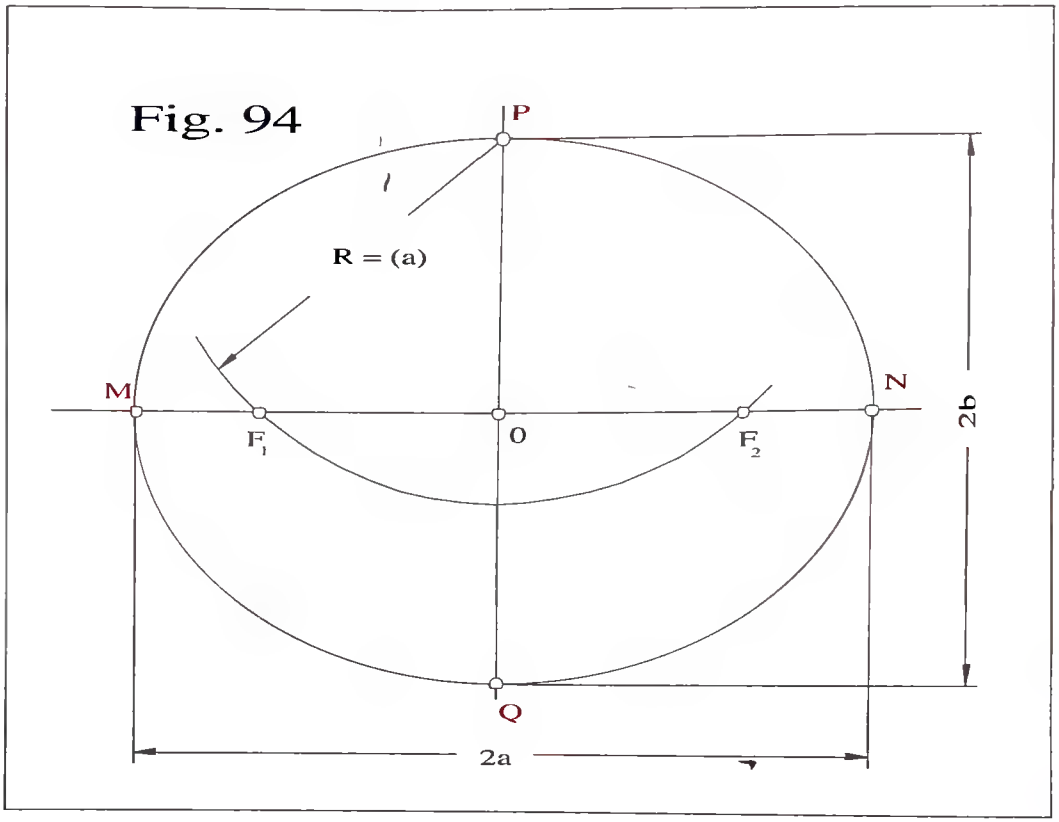


Fig. 94
P
R = (a)
M
N
F1
O
F2
2b
Q
2a

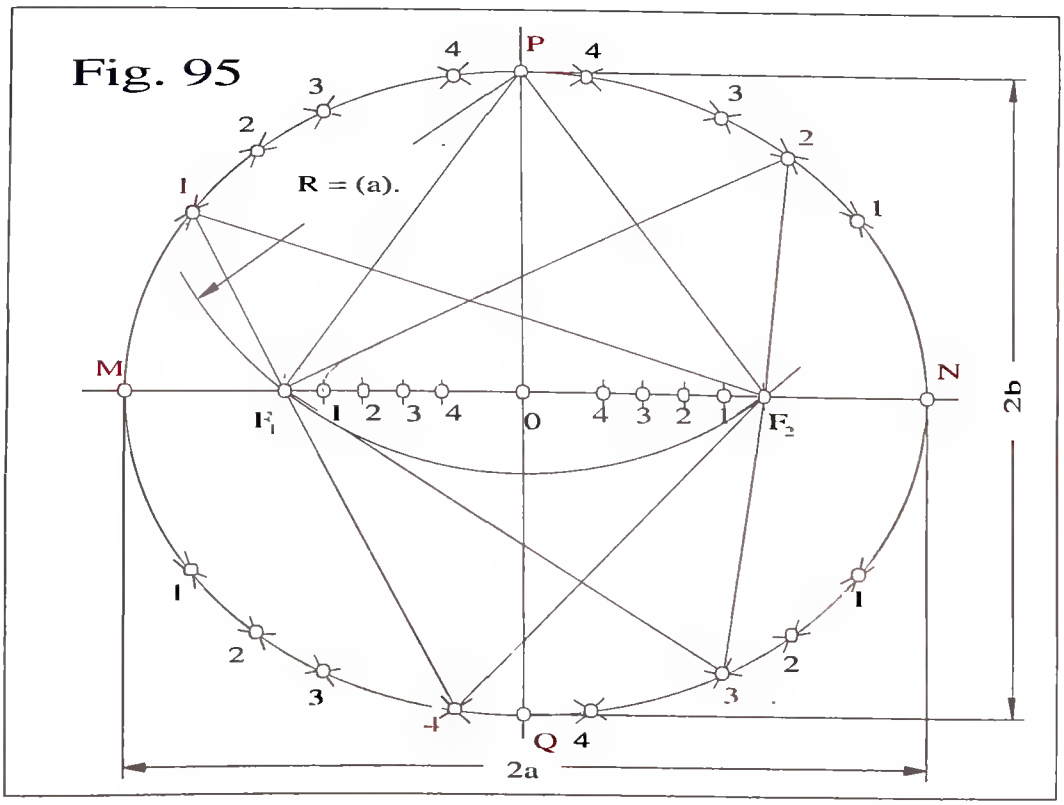


Fig. 95
P
R = (a).
M
N
F1
F2
O
Q
2b
2a

Fig. 96

Trazar una elipse, conociéndose sus dos diámetros.

SEGUNDO METODO: PROYECCION DE PUNTOS

1.º Trazamos una circunferencia de radio igual al semieje mayor OM = ON = a (circunferencia principal).
2.º Trazamos una circunferencia concéntrica a la anterior, de radio igual a OP = OQ = b.
3.º Trazamos dos ejes perpendiculares entre sí, que se corten en el punto O, centro de las circunferencias trazadas anteriormente, que cortarán a éstas en los puntos M y N (eje mayor) y P y Q (eje menor).
4.º Por el punto O trazamos una serie de rectas que cortarán a la circunferencia mayor en los puntos A, B, C, etc., y a la menor en los puntos a, b, c, etc., respectivamente.
5.º Por los puntos A, B, C, etc., trazamos rectas paralelas al eje menor PQ.
6.º Por los puntos a, b, c, etc., trazamos rectas paralelas al eje mayor MN.
7.º Las intersecciones de las rectas trazadas en los apartados 5º y 6º determinan los puntos 1-2-3... etc.
8.º La unión de los puntos M, 3, 2, 1, P y sus simétricos respecto a los ejes MN y PQ, determinan la elipse, solución del problema.

Fig. 97

Trazar una elipse, conociéndose sus dos diámetros.

TERCER METODO (POR INTERSECCION DE RECTAS)

1.º Por los puntos M N P y Q, extremos de los diámetros de la elipse, trazamos un rectángulo, cuyos lados sean paralelos a los ejes de la elipse.
2.º Dividimos el lado del rectángulo paralelo al eje menor en un número de partes iguales, en nuestro caso, 8.
3.º Dividimos el eje mayor de la elipse MN en el mismo número de partes, en nuestro caso, 8.
4.º Los puntos de intersección entre las rectas P-1 del costado y P-2 del eje mayor, así como las rectas P-2 del costado y P-2 del eje mayor, determinarán puntos de la elipse que juntos con sus simétricos respecto a los ejes deberan unirse de forma ordenada para determinar la curva elipse, solución del problema.

NOTA: En cualquiera de los métodos estudiados para la construcción de elipses, se obtendra mayor precisión en el trazado de la curva a mayor número de divisiones.

Fig. 96

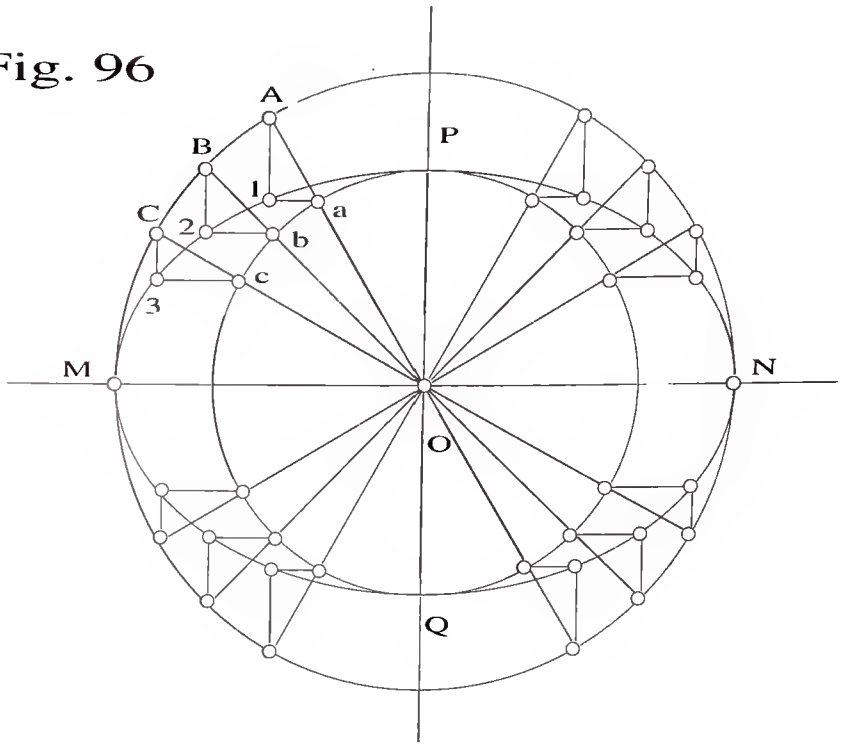


Fig. 97

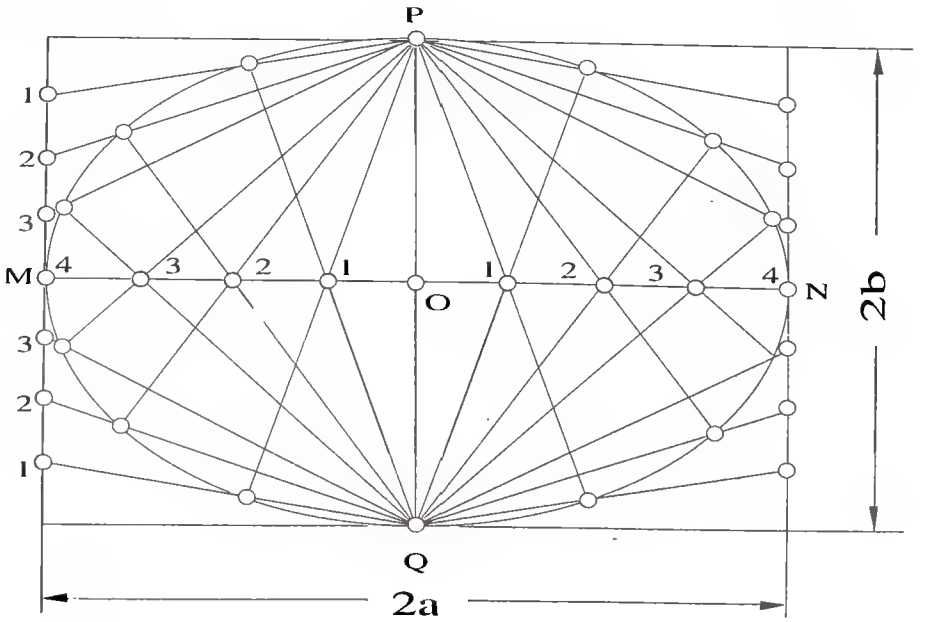


Fig. 98

Trazar una elipse, conociéndose su circunferencia principal y los focos.

1.º Trazamos un diámetro cualquiera de la circunferencia principal, en nuestro caso el P, O, Q.
2.º Trazamos la cuerda PR que pasa por el foco F_1.
3.º Trazamos una recta paralela al diámetro PQ, que pase por F_1.
4.º La unión de los puntos R y Q determinan un segmento que corta a la recta trazada anteriormente en el punto S.
5.º El punto S, así como los puntos 1, 2 y 3 simétricos respecto a los ejes, serán puntos de la elipse.

Fig. 99

Trazar una elipse por el método de la circunferencia focal.

1.º Con centro F_2, trazamos la circunferencia focal de radio R = MN.
2.º Tomamos un punto cualquiera de la circunferencia focal, tal como el P.
3.º Unimos P con los focos F_1 y F_2.
4.º La mediatriz trazada al segmento PF_1 cortará al PF_2 en el punto S de la elipse. Los puntos 1, 2 y 3 simétricos del S respecto a los ejes, también son puntos de la elipse.

Fig. 100

Trazar una elipse, conociéndose dos diámetros conjugados PQ y AB.

1.º Trazamos una circunferencia cualquiera de radio OM = ON por el punto O, intersección de PQ y AB.
2.º Dividimos el diámetro MN en partes, en nuestro caso en cuatro.
3.º Trazamos una perpendicular por el punto O al segmento MN, que corta a la circunferencia trazada en el apartado 1º en los puntos c y d.
4.º Trazamos paralelas al diámetro AB por los puntos del diámetro MN, obtenidos en el apartado 2º.
5.º Por los puntos anteriores trazamos perpendiculares al diámetro MN, que cortarán a la circunferencia trazada en el apartado 1º en los puntos ab, cd y ef.
6.º Unimos los puntos C con A y d con B obteniéndose los puntos 2 y 5.
7.º Por los puntos a, e, b, y f, trazamos paralelas a los segmentos cA y dB, obteniéndose los puntos 1, 3, 6 y 4.
8.º Los puntos P, M, 1, R, 2, 3, Q, N, 4, S, 5, 6 y P unidos ordenadamente, determinarán la elipse, solución del problema.

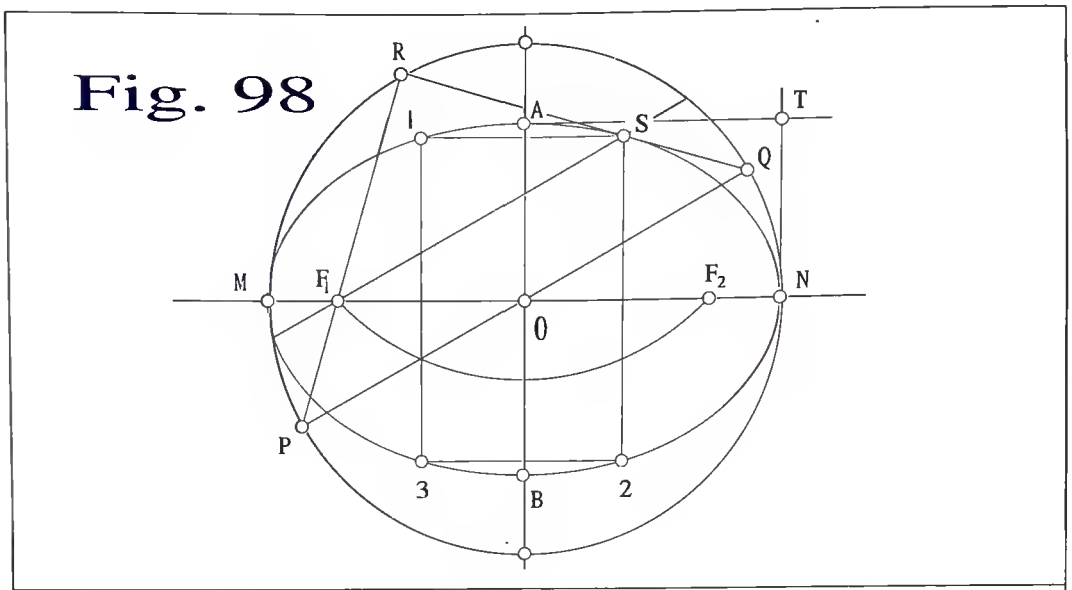


Fig. 98
R
A
S
T
1
Q
M
F1
F2
N
0
P
3
B
2

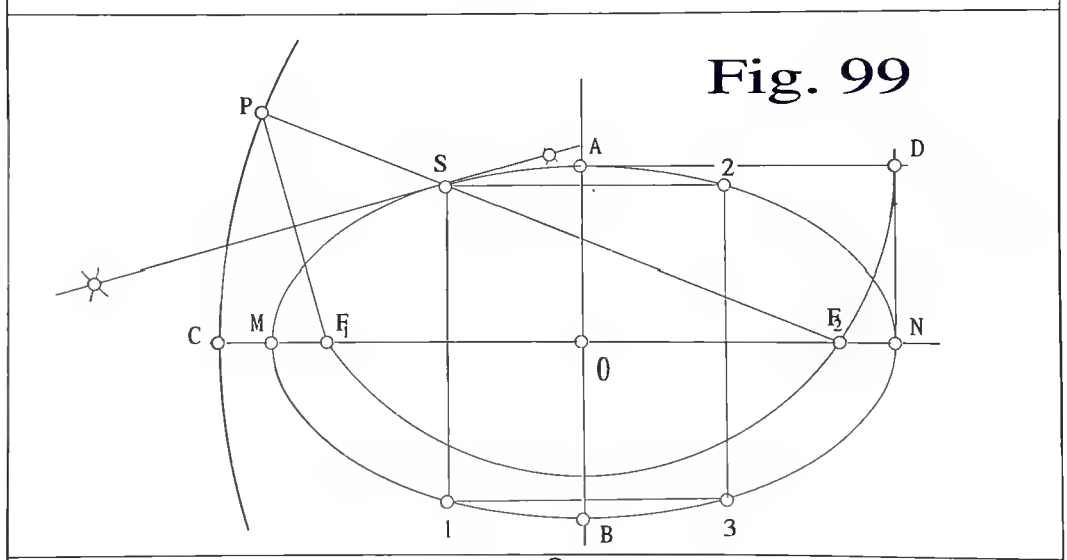


Fig. 99
P
S
A
2
D
C
M
F1
F2
N
0
1
B
3

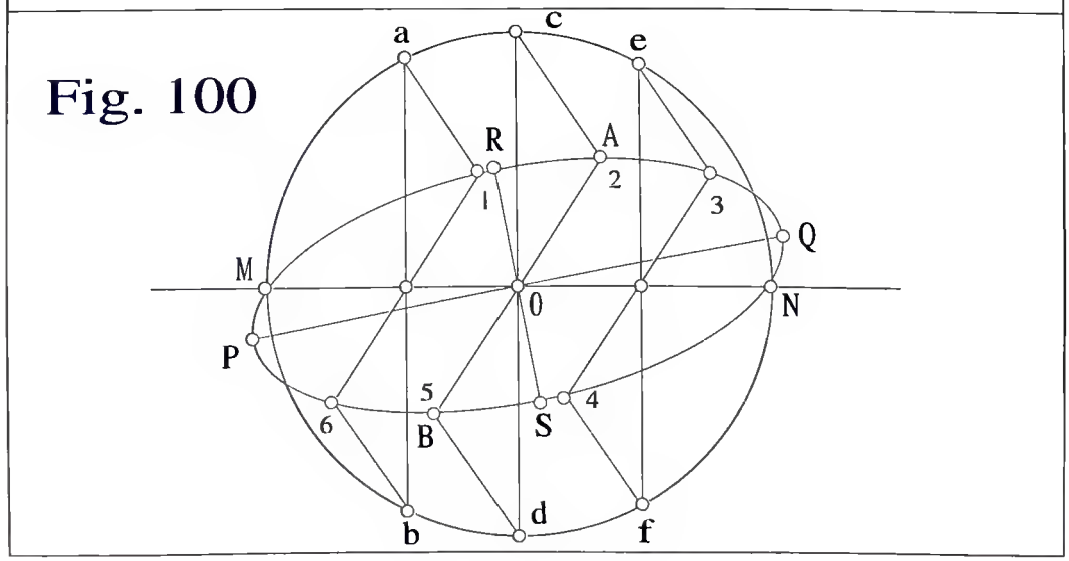


Fig. 100
a
c
e
R
A
2
1
3
Q
M
0
N
P
5
4
6
B
S
b
d
f

Fig. 101

Trazar las posibles tangentes a una elipse, desde un punto (P) exterior a ella, y determinar los puntos de tangencia.

1.º Trazamos la circunferencia focal de centro F_1 y radio $F_1C = AB$.

2.º Con centro en el punto P, trazamos una circunferencia de radio PF_2.

3.º Las dos circunferencias trazadas anteriormente se cortan en los puntos C y D.

4.º Unimos los puntos C y D con el foco F_1, obteniéndose, en la elipse, los puntos T_1 T_2.

5.º Las rectas que unen el punto dado P con los puntos T_1 y T_2 serán las tangentes a la elipse, solución del problema.

6.º Los puntos T_1 y T_2 son los puntos de tangencia.

NOTA: Siguiendo los pasos estudiados anteriormente podemos obtener tanto las tangentes a la elipse, como sus puntos de tangencia sin necesidad de conocer previamente la curva.

Para ello uniremos los puntos C y D con F_2, obteniéndose los segmentos CF_2 y DF_2.

Las mediatrices de los segmentos CF_2 y DF_2 pasarán por P y determinarán las rectas tangentes a la curva.

Los puntos T_1 y T_2 serán los puntos de tangencias.

Fig. 102

Trazar las posibles tangentes a una elipse, paralelas a una dirección dada D y determinar los puntos de tangencia.

1.º Trazamos la circunferencia focal de centro F_1 y radio $F_1C = AB$.

2.º Por el foco F_2 trazamos una recta perpendicular a la dirección dada D (Ver Fig. 5.)

3.º La circunferencia focal trazada en el apartado 1º y la recta trazada en el apartado 2º se cortarán en los puntos C y D. (Nota: el punto D no tiene por qué pertenecer a la dirección dada.)

4.º Unimos el foco F_1 con los puntos C y D, obteniéndose las rectas $F_1.C$ y F_1D, que cortarán a la elipse en los puntos T_1 y T_2.

5.º Por T_1 y T_2 trazamos paralelas a la dirección dada D, siendo éstas tangentes a la elipse, solución del problema.

6.º Los puntos T_1 y T_2 son los puntos de tangencia.

Fig. 101

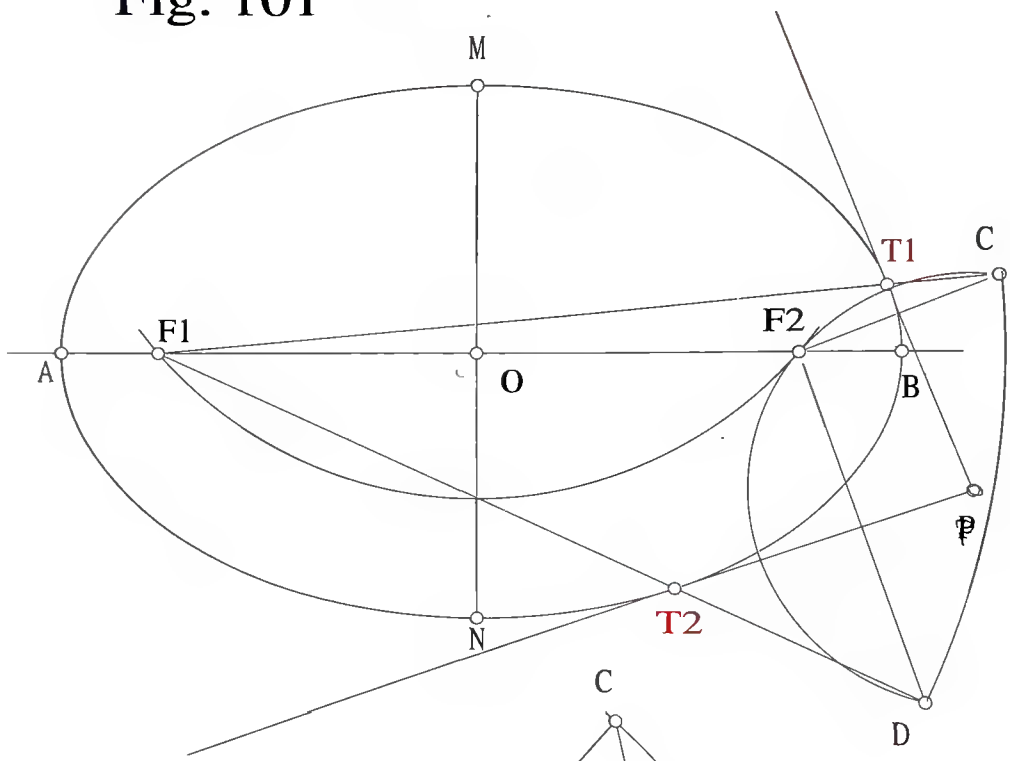


Fig. 102

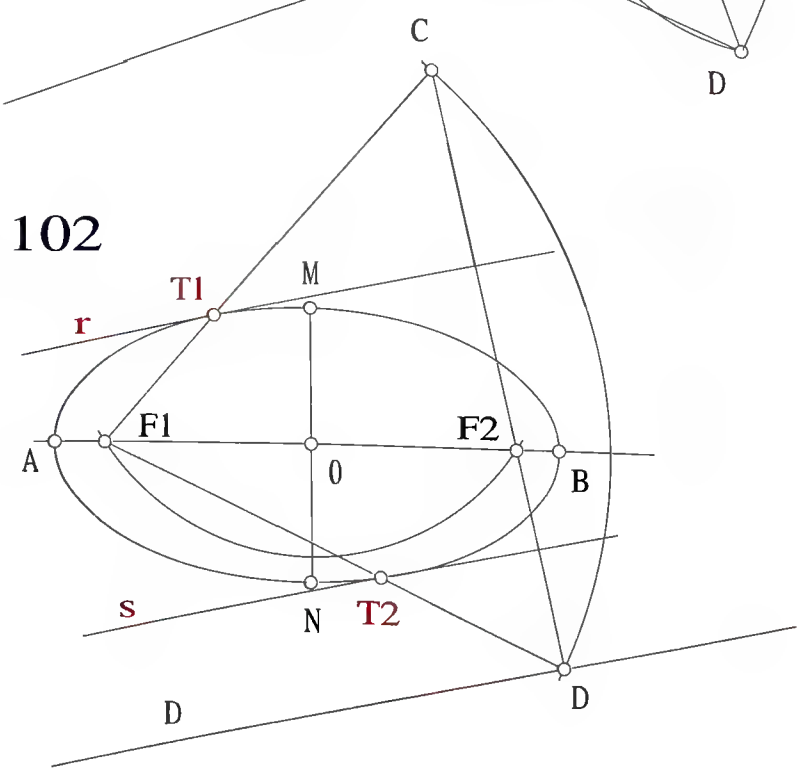


Fig. 103

Dada una elipse, determinar sus ejes.

1.º Trazamos dos rectas paralelas entre sí, que cortarán a la elipse en los puntos EF y GH.

2.º Tomamos los puntos medios K y L de los segmentos EF y GH.

3.º Trazamos una recta que pase por los puntos K y L, que cortarán a la elipse en los puntos I y J.

4.º El punto medio O del segmento IJ es el centro de la elipse.

5.º Con centro en el punto O trazamos una circunferencia cualquiera, que cortará a la elipse en los puntos 1, 2, 3, y 4.

6.º Las mediatrices de 1-4 ó 2-3 y 1-2 ó 4-3 determinarán los ejes mayor y menor, respectivamente solución del problema.

Fig. 104

Determinar los ejes de una elipse, conociéndose dos diámetros conjugados.

1.º Sean AB y CD los diámetros conjugados de la elipse.
2.º Por el punto O, intersección entre los segmentos AB y CD trazamos una recta perpendicular al segmento AB.
3.º Con centro en el punto O y radio R = OA trazamos un arco de circunferencia, que cortará a la recta anterior en el punto G.
4.º Unimos G con C y obtenemos su punto medio O_1.
5.º Con centro en O_1 y radio $O_1G = O_1C$ trazamos una circunferencia.
6.º Con centro en O_1 y radio O_1O trazamos una segunda circunferencia, que cortará en los puntos E y J a la prolongación del segmento GC, trazado en el apartado 4º.
7.º Unimos los puntos E y J con O que, prolongados, determinan la posición de los ejes reales de la elipse.
8.º Trazamos una recta que pase por O y O_1, que cortará a la circunferencia de centro O_1 en los puntos L y F.
9.º Los segmentos OL y OF son las magnitudes de los semiejes menor y mayor de la elipse. Las magnitudes de estos segmentos deben ser trasladadas a la posición de los ejes reales de la elipse. (Ver apartado 7º.)
10.º La circunferencia de centro O y radio OL cortará al eje menor en los puntos P y Q, y la circunferencia de centro O y radio OF cortará al eje mayor real en los puntos M y N.

NOTA: La solución al problema es la elipse que pasa por los puntos M, P, N y Q.

Fig. 103

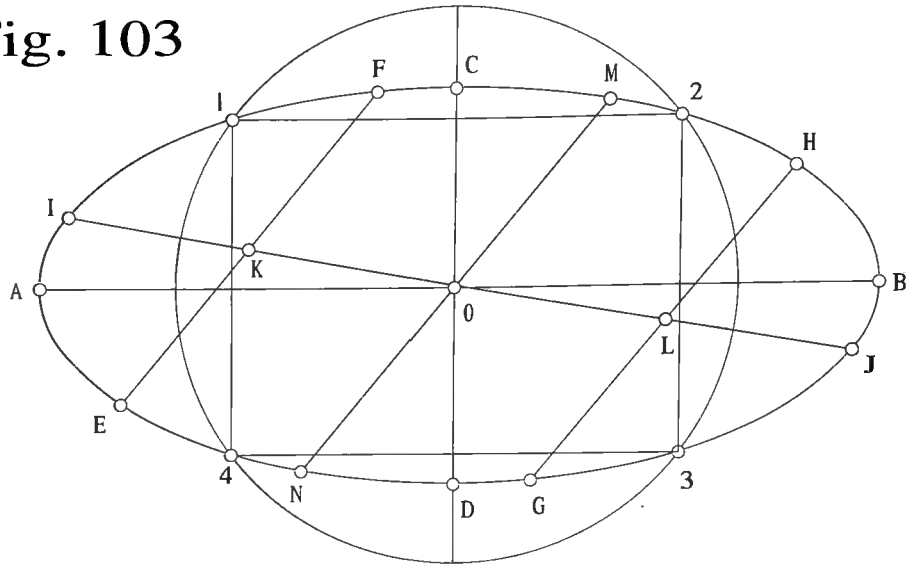
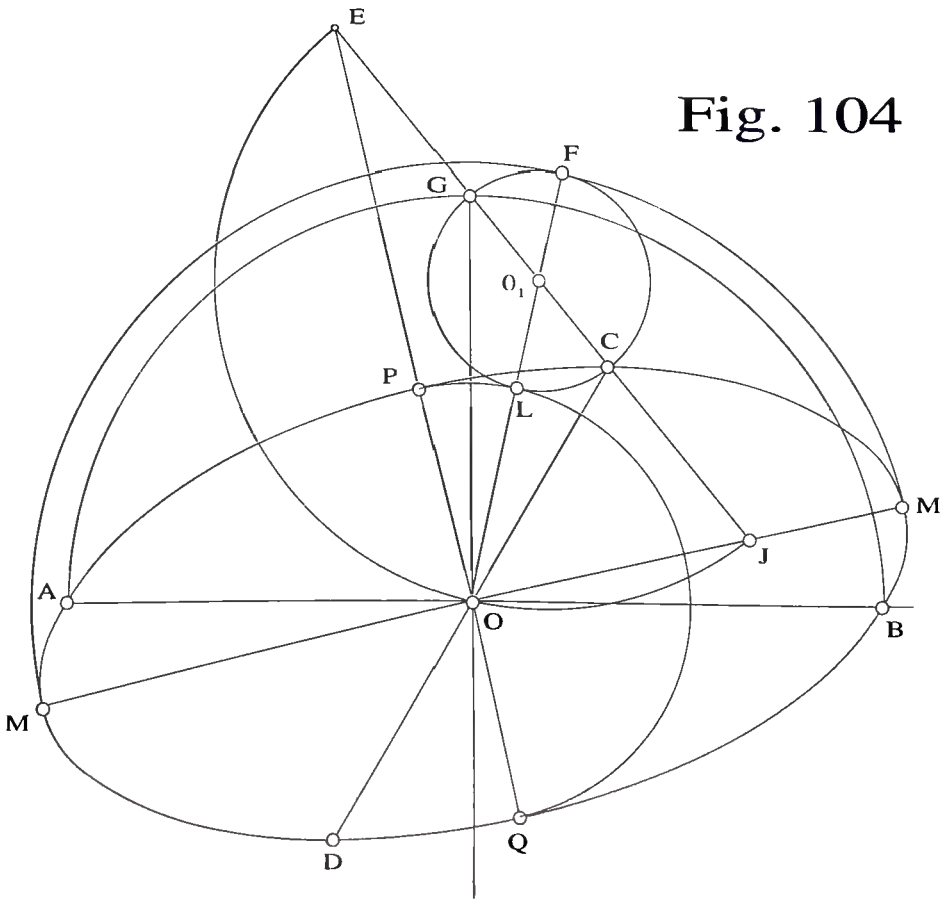


Fig. 104



JAR'23

Parábola

PARABOLA

DEFINICION Y PROPIEDADES

La parábola es una curva de una rama abierta y contenida en un plano.
Podemos definirla como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo, denominado foco y de una recta fija que denominaremos directriz.
La parábola es simétrica respecto a un eje, siendo éste perpendicular a la directriz, y contiene al foco.

El punto de intersección del eje con la parábola lo denominaremos vértice.
La tangente trazada a la parábola por su vértice será perpendicular a su eje y, por tanto, paralela a su directriz.

El vértice de la parábola es equidistante entre el foco y la directriz.

Fig.105

Trazar una parábola, conociéndose a) su eje, b) su vértice (V) y c) un punto (A) de la curva.

PRIMER METODO

1.º Trazamos el eje que pasa por V.
2.º Por el punto A trazamos una perpendicular al eje, que lo cortará en el punto P.
3.º Por el vértice V trazamos una paralela al segmento AP, y por A una paralela al eje VP, obteniéndose el punto D.
4.º Por simetría, respecto al eje VP, obtendremos los puntos C y B.
5.º Dividimos los segmentos AD y BC en cualquier número de partes y de la misma forma los semisegmentos VD y VC (en nuestro caso en 4).
6.º Por el vértice V trazamos las rectas V1, V2 y V3.
7.º Por los puntos 1, 2 y 3 de los semiejes VD y VC trazamos paralelas al eje VP.
8.º La unión de los puntos de intersección de las rectas trazadas en los apartados 6º y 7º nos darán la curva parábola, solución del problema.

Fig.106

Trazar una parábola, conociéndose a) su eje, b) su vértice (V) y c) un punto (A) de la curva.

SEGUNDO METODO

Procederemos como en la Fig. 105, con la diferencia de unir los puntos A y B con las divisiones 1 a 3 del eje VP

NOTA: Para obtener mayor precisión en el trazado de la parábola, los segmentos VP y AB deberán dividirse en el mayor número de partes posibles por ejemplo en 8 partes el segmento VP y en 16 partes el segmento AB.

Fig. 105

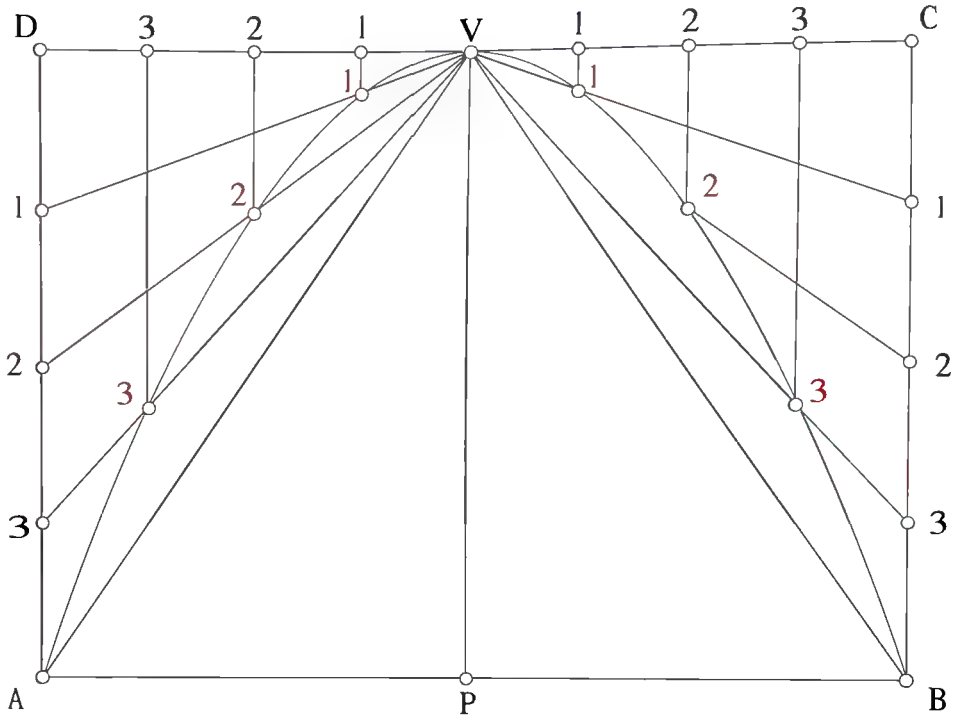


Fig. 106

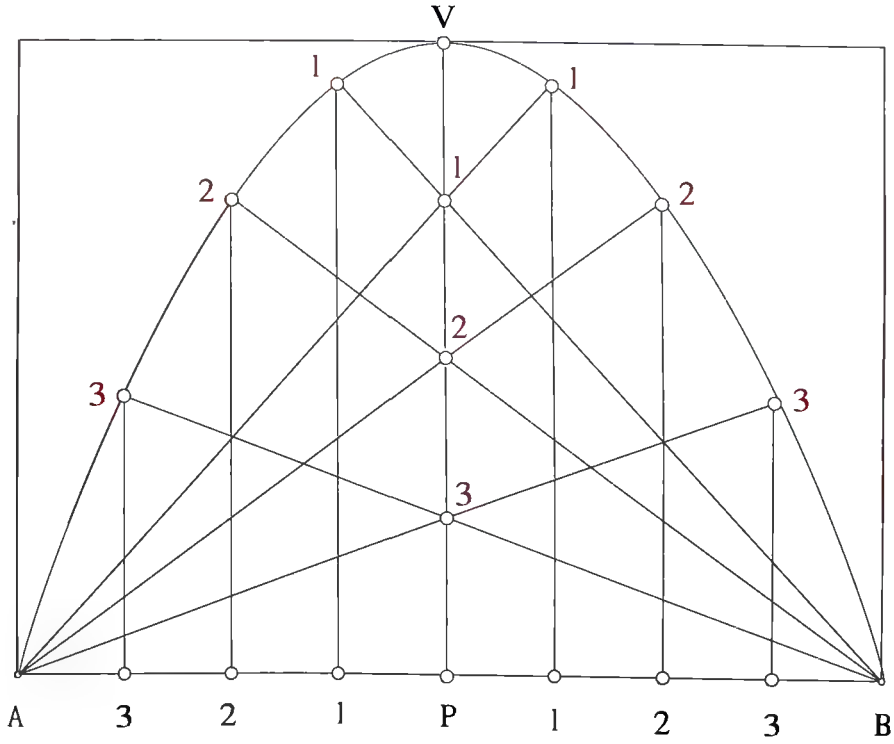


Fig. 107

Trazar una tangente a una parábola, por un punto (P) de la curva.

1.º Unimos el punto dado P con el foco F.

2.º Trazar el segmento PA, perpendicular a la directriz, por el punto dado P, obteniéndose el punto A.

3.º Unimos el foco F con el punto A.

4.º La mediatriz trazada al segmento AF por el punto P, determinará la tangente (t) a la curva, solución del problema.

NOTA: El vértice (V) de la parábola, equidista del foco F y de la directriz perpendicular al eje.

Fig. 108

Trazar las posibles tangentes a una parábola, desde un punto dado (P) exterior a ella.

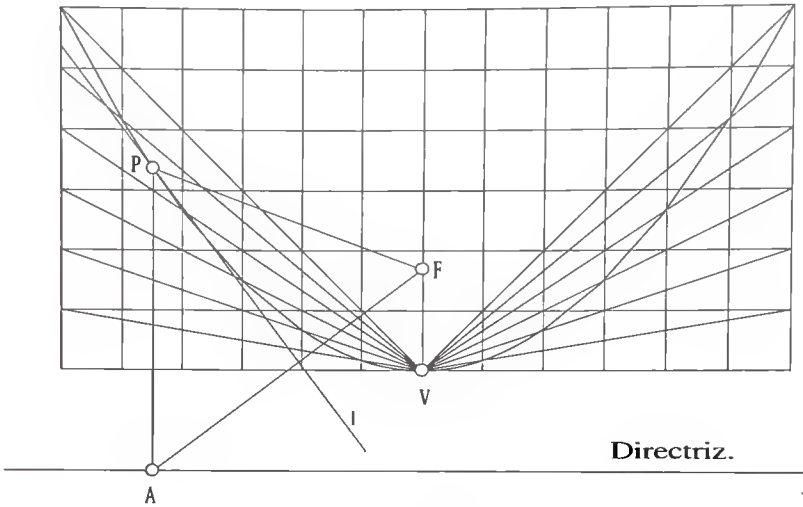
NOTA: Trazaremos la parábola por un método diferente a los métodos estudiados en las Figs. 105 y 106. En nuestro caso, el método a seguir será "por puntos".

1.º Conocido el vértice (V), equidistante entre el foco F y la directriz, trazamos por el punto N la recta (t), perpendicular a la directriz dada.
2.º A partir del punto B trazamos paralelas a la directriz, tales como la 1, 2, 3, 4, 5,.. etc.
3.º Con centro en F y radio FB, trazamos el arco 2, que cortará a la paralela 2 a la directriz en los puntos a y b.
4.º Con centro en F y radio 1B, trazamos el arco 3, que cortará a la paralela 3 a la directriz en los puntos c y d.
5.º Siguiendo el procedimiento empleado en los apartados 3º y 4º, obtendremos una serie de puntos que, unidos, nos darán la curva parábola.
Para trazar las posibles tangentes a la parábola, seguiremos los siguientes pasos.

a) Con centro en el punto P dado y radio PF, trazamos un arco de circunferencia, que cortará a la directriz en los puntos S y N.
b) Unimos los puntos S y N con el foco F, obteniéndose los segmentos SF y NF, respectivamente.
c) La perpendicular trazada a la directriz por el punto S, cortará a la mediatriz del segmento SF en el punto M (primer punto de tangencia con la parábola).
d) La perpendicular trazada a la directriz por el punto N cortará a la mediatriz del segmento NF en el punto Z (segundo punto de tangencia con la parábola).

NOTA: Como puede apreciarse en la Fig. no es necesario trazar previamente la curva para obtener las tangentes T_1 y T_2 así como los puntos de tangencia M y Z.

Fig. 107



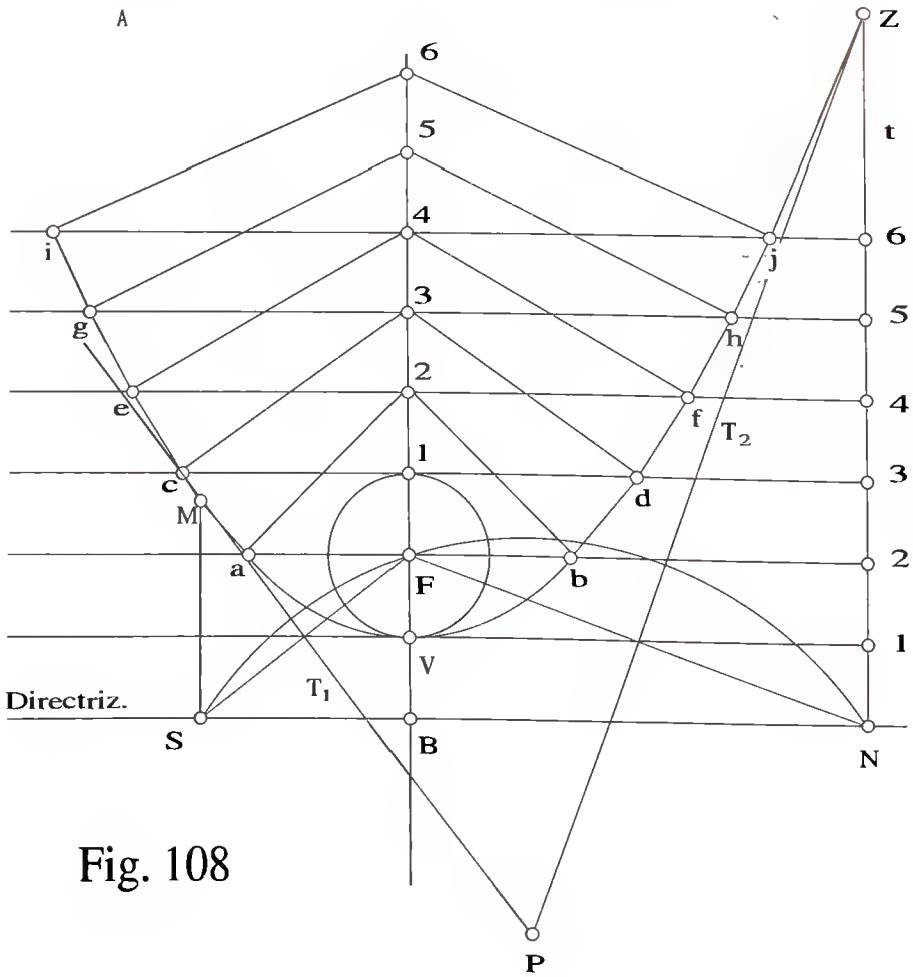


Fig. 108

Fig. 109

Trazar una recta (t) tangente a una parábola, paralela a una dirección dada.

1.º Por el foco F trazamos una recta perpendicular a la dirección dada, que la cortará en el punto B.
2.º El segmento FB cortará a la directriz en el punto A.
3.º Trazamos la recta (t) mediatriz del segmento FA, que pasa por el punto O y es paralela a la dirección dada.
4.º Por el punto A trazamos la perpendicular a la directriz que cortará a la recta t en el punto T.

NOTA: La recta (t) es la solución del problema, siendo el punto T el punto de tangencia entre la recta y la parábola. Como puede apreciarse en la Fig. no es necesario trazar previamente la curva para obtener las tangentes T_1 y T_2 así como los puntos de tangencia M y Z.

Fig. 110

Trazar una parábola, conocido su eje, su foco (F) y una tangente (t_2).

1.º Por el punto (F), foco de la parábola, trazamos una recta perpendicular a la recta (t_2), tangente a la curva.
2.º Por el punto (A), simétrico del (F) respecto a (t_2), trazamos una recta perpendicular al eje de la curva, siendo ésta la directriz de la parábola.
3.º El punto (V) equidistante entre el foco (F) y la directriz, es el vértice de la parábola, quedando ésta definida, solución del problema.

NOTA: En el caso de conocerse la tangente (t_1) seguiríamos el mismo procedimiento.

Fig. 111

Trazar una parábola, conocidas dos de sus tangentes y sus correspondientes puntos de tangencias (M y N).

1.º Unimos los puntos de tangencia dados M y N para obtener el punto (A), mediatriz del segmento MN.
2.º Unimos el punto A con el punto P, intersección de las tangentes dadas, t_1 y t_2 a la curva. El segmento AP nos determina la dirección del eje de la parábola.
3.º Por los puntos de tangencia M y N dados, trazamos paralelas al segmento AP, así como las rectas simétricas de éstos respecto a las tangentes t_1 y t_2, que se cortarán en el punto F (foco de la parábola).
4.º La recta perpendicular trazada al segmento AP desde los puntos (D) o (C), determina la directriz de la parábola.

NOTA: ND = NF y MF = MC.

Fig. 109

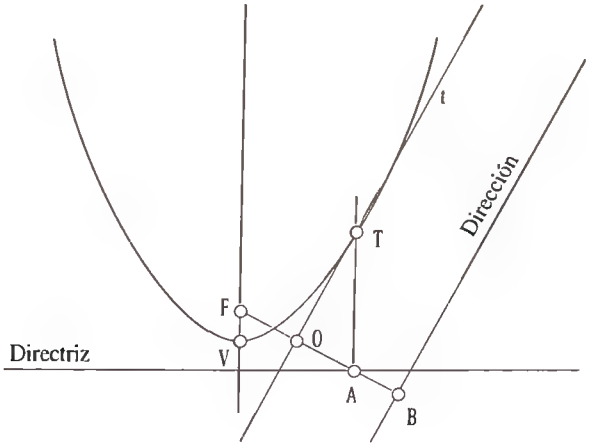


Fig. 110

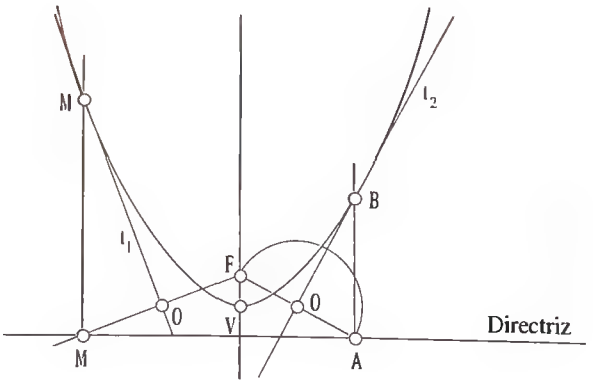
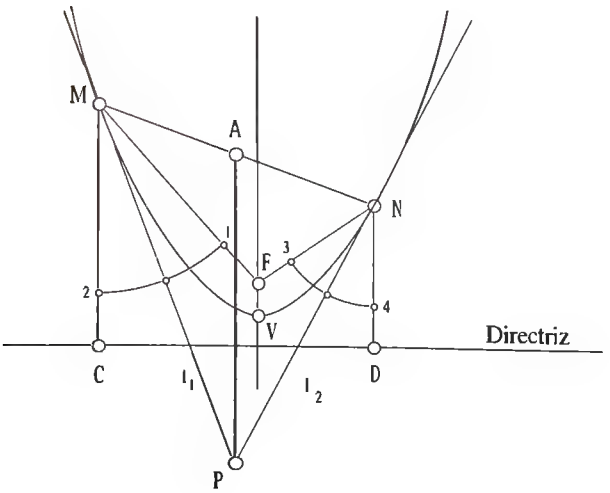


Fig. 111



CURVAS CONICAS (GENERALIDADES)

El "cono" es un objeto cuya base puede ser una circunferencia o una elipse que se va estrechando de forma regular, hasta terminar en un punto (V), que denominaremos vértice.

El conjunto de todas las rectas que pasan por el vértice (V) y cortan a los distintos puntos de la base, la denominaremos generatrices.

Las "cónicas" son curvas planas, producidas por la intersección de un cono con un plano que no pase por su vértice.

Según el ángulo formado entre el plano y el eje del cono, se producirán distintos tipos de "cónicas", pudiendo ser éstas elipses, parábolas e hipérbolas.

a) Cuando el plano secante sea perpendicular al eje del cono, la sección producida será circular.
b) Cuando el ángulo formado entre el plano secante y el eje del cono es mayor que el semiángulo en el vértice, la cónica será una "elipse".
c) Cuando el ángulo formado entre el plano secante y el eje del cono sea igual que el semiángulo en el vértice, la cónica será una "parábola".
d) Cuando el ángulo formado entre el plano secante y el eje del cono es menor que el semiángulo en el vértice, la cónica es una "hipérbola".

Fig. 112

a) Al ser el plano perpendicular al eje (VO) del cono, la sección será circular.

b) Al formar el plano con el eje (VO) del cono un ángulo mayor que AVO, la sección será una elipse.

c) Al formar el plano con el eje (OV) del cono el mismo ángulo que AVO, la sección será una parábola.

Fig. 113

Al formar el plano con el eje (VO) del cono un ángulo menor que AVO, la sección será una hipérbola.

CIRCULO

Superficie = $A = \pi R^2$ **Perímetro** = $L = 2\pi R = \pi D$

ELIPSE

Superficie = $A = \pi a \bullet b$ **Perímetro** = $L = \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$

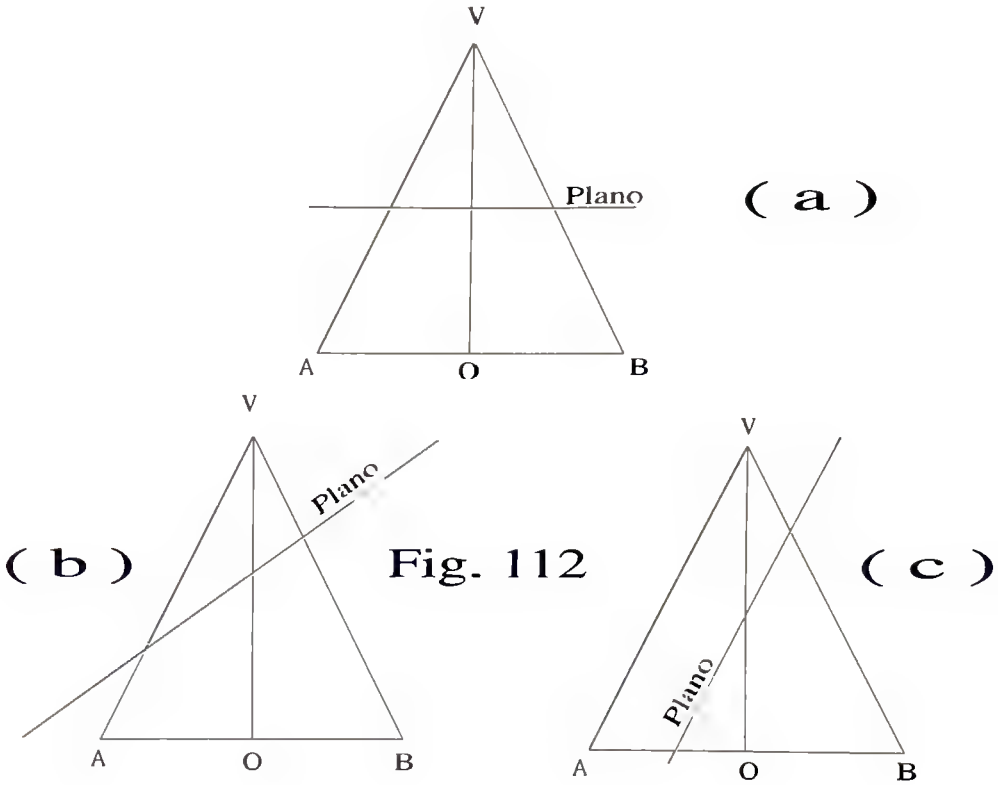


Fig. 112

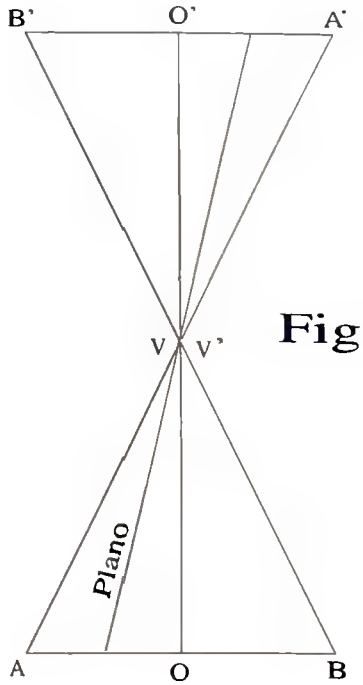


Fig. 113

JAR'23

Hipérbola

HIPERBOLA (DEFINICION Y PROPIEDADES)

La hipérbola es una curva de dos ramas abiertas y contenida en un plano.

Podemos definirla como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias a otros dos fijos,que denominaremos focos, es constante.

Tiene dos ejes perpendiculares entre sí, siendo éstos simétricos respecto a las dos ramas de la curva.

La distancia del eje mayor, comprendida entre los dos vértices, la representaremos como 2a.

La distancia entre los focos (distancia focal) la representaremos como 2c.

Cualquier punto de la curva, unido con los focos, determinará los radios vectores.

Las tangentes a la hipérbola en el infinito, la denominaremos asíntotas y cuando éstas formen 45º respecto a los ejes, la hipérbola la denominaremos "Hipérbola equilátera".

Fig. 114

Trazar una hipérbola, conociéndose el vértice (V2), el foco (F1) y un punto (P) de la curva.

1.º Trazamos por el punto dado (P) una recta paralela y otra perpendicular al eje mayor.
2.º Por el vértice V_2 trazamos una recta perpendicular al eje mayor, formándose el rectángulo V_2, 4', P y 4.
3.º Dividimos las rectas (P-4) tanto horizontal como verticalmente, en un número de partes (en nuestro caso en 4), obteniéndose los puntos 1, 2 y 3.
4.º Trazamos los segmentos V_2-1', V_2-2' y V_2-3', así como los F_1-1, F_1-2 y F_1-3.
5.º La intersección de los segmentos anteriores unidos a los puntos P y V_2 y sus simétricos respecto a los dos ejes determinarán la hipérbola, solución del problema.

Fig. 115

Determinar los focos de una hipérbola, conociéndose sus vértices V_1, V_2 y sus asíntotas.

1.º Por los vértices V_1 y V_2 trazamos perpendiculares al eje mayor, que cortará a las asíntotas en los puntos P_1-P_2 y sus simétricos respecto al eje principal.
2.º Con centro en el punto O, intersección de los ejes y radio = OP_1 = OP_2 trazamos una circunferencia, que corta al eje principal en los puntos F_1 y F_2 (focos de la hipérbola), solución al problema, ya que la curva queda definida.

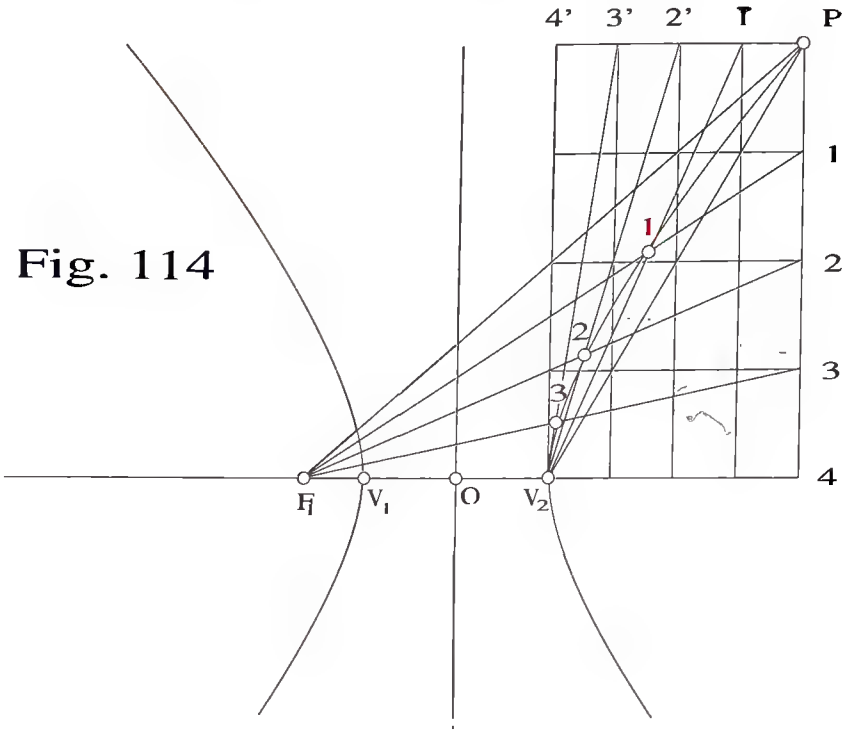


Fig. 114

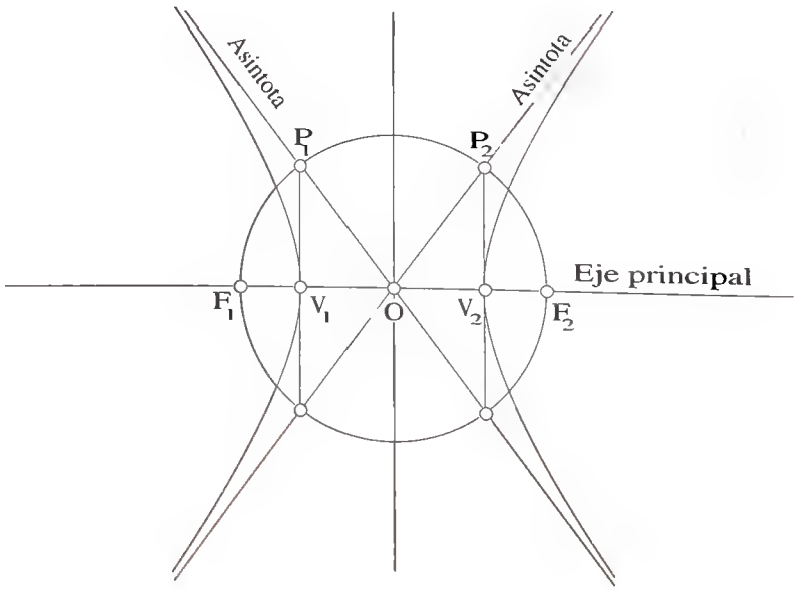


Fig. 115

Fig. 116

Trazar una hipérbola completa por el método de simetría, respecto a los ejes, basándonos en el ejercicio de la Fig. 114.

NOTA: Con objeto de obtener mayor precisión en la curva, hemos dividido los semisegmentos BM y BN en 6 partes. Obtenidos los puntos, deberán unirse por una plantilla de curvas irregulares o por un junquillo suficientemente flexible.

Fig. 117

Trazar una hipérbola, conociéndose los vértices y los focos, utilizando el método de puntos.

1.º A partir de los focos F_1 y F_2, a ambos lados del eje mayor, tomamos de forma arbitraria una serie de puntos, tales como el 1, 2, 3 y 4.

2.º Con centro en el foco F_2 y radio 1B, trazamos el círculo m.

3.º Con centro en el foco F_2 y radio 2B, trazamos el círculo n.

4.º Con centro en el foco F_2 y radio 3B, trazamos el círculo p.

5.º Con centro en el foco F_1 y radio 1A, trazamos el círculo M.

6.º Con centro en el foco F_1 y radio 2A, trazamos el círculo N.

7.º Con centro en el foco F_1 y radio 3A, trazamos el círculo P.

8.º Los círculos M y n, N y n y P y p se corta en puntos que, unidos con el B de forma ordenada, determinarán la hipérbola, solución del problema.

NOTA: La segunda rama de la hipérbola se puede obtener por simetría, respecto del eje menor, mediatriz entre los focos F_1 y F_2 y perpendicular al eje mayor.

Fig. 116

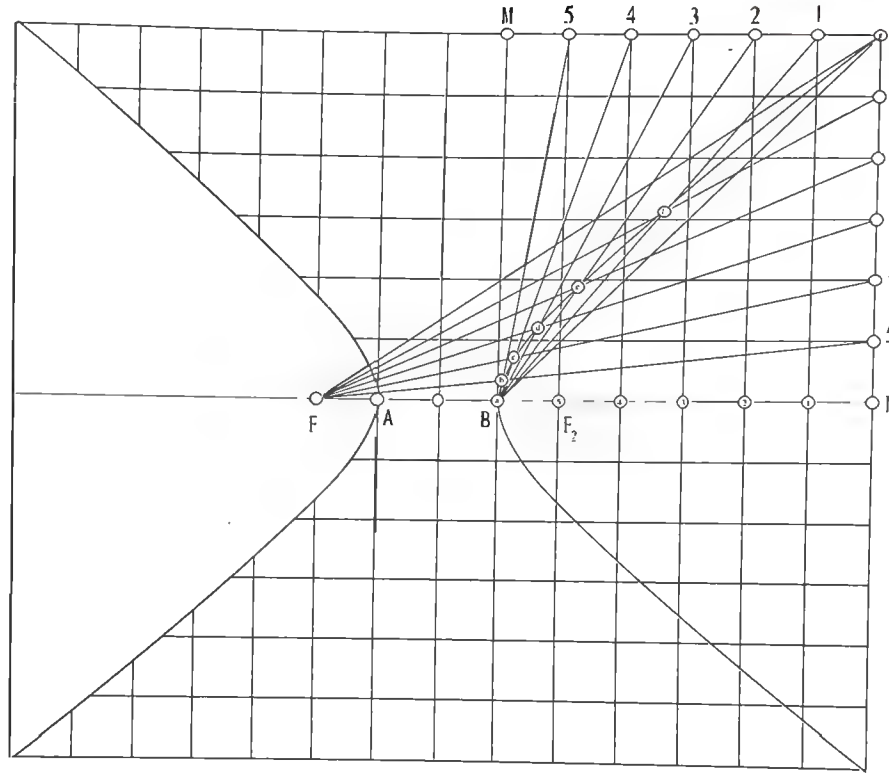


Fig. 117

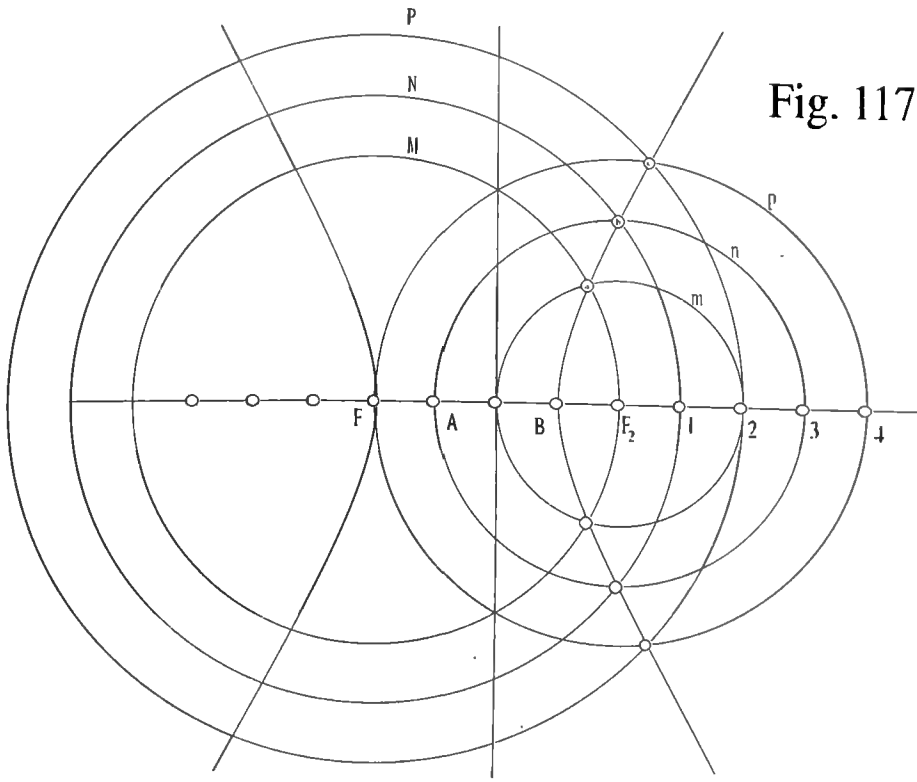


Fig. 118

Trazar la tangente (s) a una hipérbola, por un punto (P) de ella, desconociéndose la curva.

1.º Por el punto dado (P) trazamos los radios vectores PF_1 y PF_2.
2.º Por el punto dado (P) trazamos la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores PF_1 y PF_2. La recta s es la solución del problema. El punto (P) es el de tangencia entre la curva y la recta (s) tangente a ella.

Fig. 119

Trazar las posibles tangentes a una hipérbola, por un punto (P) exterior a ella, desconociéndose la curva.

1.º Con centro en el foco F_2, trazamos una circunferencia de radio igual a 2a (circunferencia focal).
2.º Con centro en el punto P y radio PF_1, trazamos otra circunferencia, que cortará a la anterior trazada en los puntos A y B.
3.º Las mediatrices de los segmentos F_1B y F_1A, determinarán las rectas T_1 y T_2, tangentes a la hipérbola, solución del problema.

NOTA: para hallar los puntos de tangencia, prolongaremos los segmentos F_2B y AF_2, obteniéndose los puntos T_1 y T_1 en las tangentes t_1 y t_1 respectivamente.
T_1 y T_1 son los puntos de tangencia.

Fig. 120

Trazar las posibles tangentes a una hipérbola, paralelas a una dirección dada, desconociéndose la curva.

1.º Por el foco F_1, trazamos la circunferencia focal.
2.º Por el foco F_2, trazamos la recta perpendicular a la dirección dada, que cortará a la circunferencia trazada anteriormente en los puntos A y B.
3.º Las mediatrices de los segmentos F_2B y F_2A determinan las rectas t_1 y t_2, tangentes a la hipérbola, solución del problema.

NOTA:
a) La unión de los puntos F_1 y B determinan un segmento que, prolongado, cortará a la recta t_1 en el punto T_1, siendo éste un punto de tangencia.
b) La unión de los puntos F_1 y A determinan un segmento que, prolongado, cortará a la recta t_2 en el punto T_2, siendo éste otro punto de tangencia.

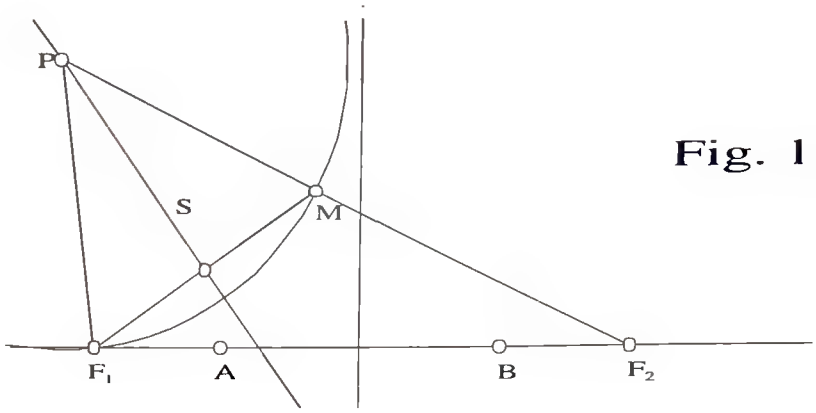


Fig. 118

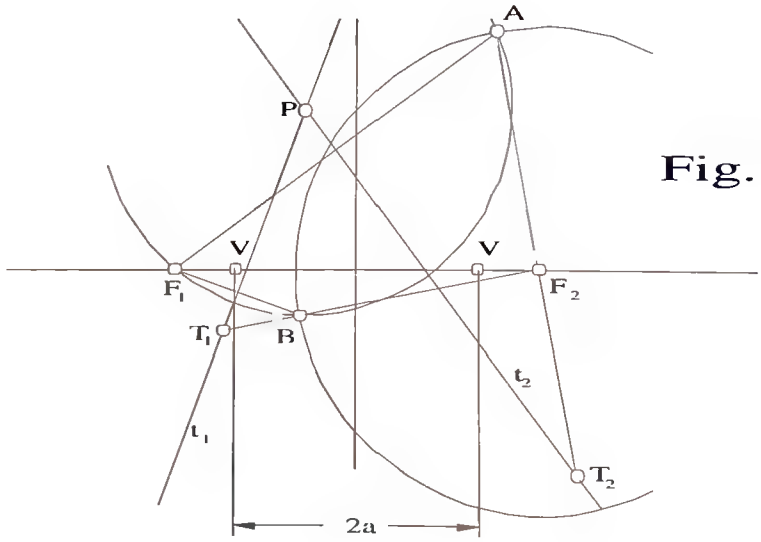


Fig. 119

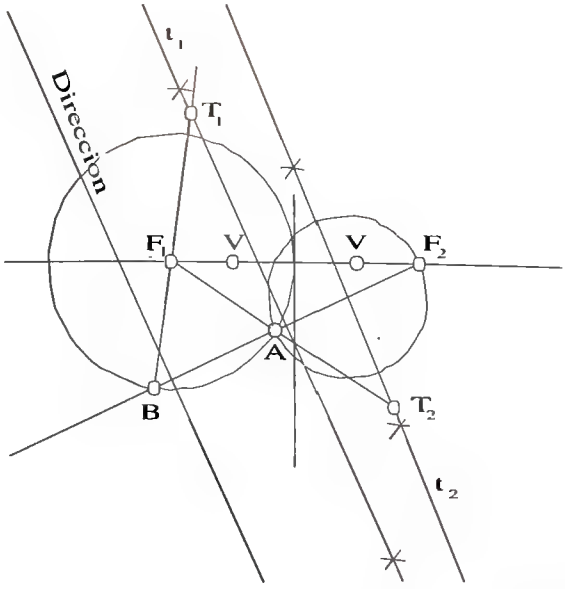


Fig. 120

JAR'23

Curvas

Fig. 121

Trazar una espiral de dos centros, conocido su paso (AB).

1.º Trazamos una recta cualquiera, en nuestro caso la que pasa por los puntos E y G.
2.º Sobre dicha recta trazamos los puntos A y B a una distancia, entre ellos, igual al paso.
3.º Obtenemos el punto O, mediatriz del segmento AB.
4.º Con centro en el punto O y radio OB trazamos un arco, que cortará a la recta trazada en el apartado 1º en los puntos A y B.
5.º Con centro en el punto B y radio igual a AB, trazamos un arco, que cortará en el punto D a la recta trazada en el apartado 1º.
6.º Con centro en el punto O y radio igual a OD, trazamos un arco, que cortará en el punto E a la recta trazada en el apartado 1º.
7.º Con centro en el punto B y radio igual a BE, trazamos un arco, que cortará en el punto G a la recta trazada en el apartado 1.º.

NOTA: Fig. fuera de escala.

Fig. 122 a

Trazar una espiral de cuatro centros (evolvente del cuadrado).

1.º Trazamos el cuadrado de vértices 1, 2, 3, y 4 y prolongamos sus lados.
2.º Con centro en el vértice 1 y radio 1-2, trazamos el arco de circunferencia 2A.
3.º Con centro en el vértice 4 y radio 4A, trazamos el arco de circunferencia AB.
4.º Siguiendo el procedimiento estudiado en los apartados 2º y 3º, por los vértices 3 y 2 del cuadrado, obtenemos la curva que pasa por los puntos 2, A, B, C y D, solución del problema.

Fig. 122 b

Trazar la evolvente de un pentágono regular, conocido su lado.

a) Seguir el procedimiento estudiado en la Fig. 122 a.

Fig. 123

Trazar la espiral circular, conociéndose su origen, su círculo y el número de vueltas (en nuestro caso dos).

1.º Sea P el origen y OC el radio del círculo.
2.º Trazamos el arco OQ, con centro en el punto C y radio OC.
3.º Por el punto P trazamos una paralela al segmento AB, obteniéndose en el arco OQ el punto (1), que proyectado ortogonalmente al segmento AB, determinará el punto (N).
4.º Dividimos el segmento AN en tantas partes iguales como vueltas (en nuestro caso dos), obteniéndose el punto Q.
5.º Proyectando ortogonalmente el punto Q sobre el arco OQ, y desde éste al eje OC, obtendremos el punto S.
6.º Para obtener mayor precisión en la curva, dividiremos los segmentos NQ y QA en mayor número de partes iguales, en nuestro caso cuatro. Refiriendo estas nuevas divisiones al arco OQ y al eje OC, obtendremos por traslación circular, mediante arcos de centro (O), una serie de puntos sucesivos sobre cada uno de los correspondientes radios que, unidos ordenadamente, nos darán la solución al problema.

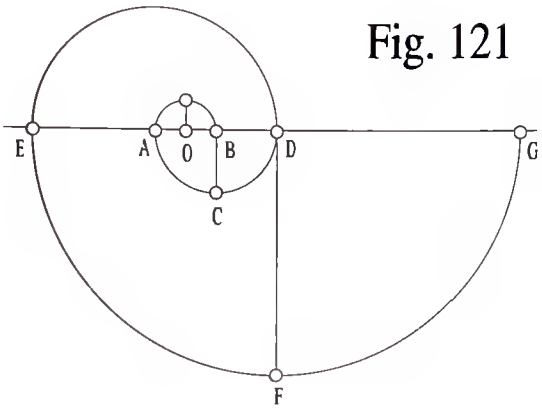


Fig. 121

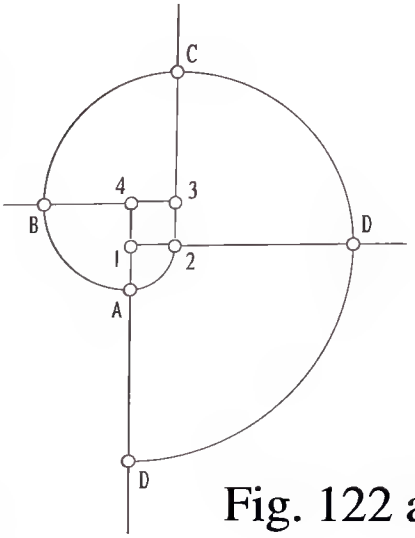


Fig. 122 a

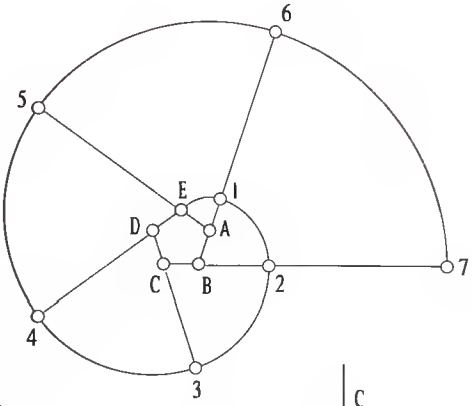


Fig. 122 b

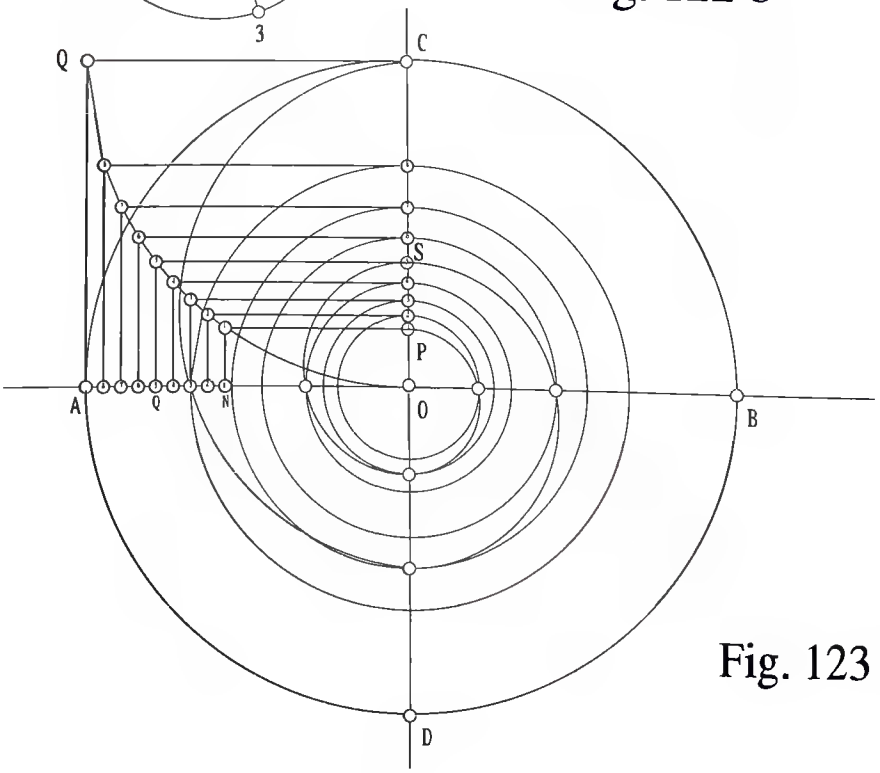


Fig. 123

CURVAS TRIGONOMETRICAS

Los valores del seno y del coseno podemos obtenerlos, gráficamente, a partir de las curvas senoide y cosenoide.

Fig. 124

Trazamos una circunferencia de radio cualquiera (R), y la dividimos en un número de partes iguales en nuestro caso doce).

Los puntos de división de la circunferencia distarán del eje horizontal, desde cero hasta el valor del radio R = a, pasando por los valores b y c pudiendo ser estos positivos o negativos.

Fig. 125 a

Trazado de la curva trigonométrica (senoide).

1.º Trazamos una rectángulo, cuyo lado mayor (AB) sea igual al valor de la longitud de la circunferencia de radio R de la Fig. 124, y su lado menor igual al diámetro D = 2R. = 2a.
2.º Dividimos (en nuestro caso doce) el lado mayor (AB) del rectángulo.
3.º Sobre los lados menores del rectángulo y, a partir de los puntos A y B, tomamos las distancias c, b y a de la Fig. 124.
4.º Los puntos de intersección de las rectas trazadas en los apartados 2º y 3º unidos ordenadamente determinarán la curva senoide, solución del problema.
5.º La intersección de la curva con las rectas 1 a 12, determinarán los valores del seno, pudiendo ser positivos o negativos, según estén sobre o debajo del segmento AB.

NOTAS:

a) Los valores de A y B respecto del segmento AB son iguales a(0) = seno de 0º = seno de 180º.
b) El valor de M respecto del segmento AB es igual a (1) = seno de 90º.
c) El valor de N respecto del segmento Ab es igual a (-1) = seno de 270º.
d) Los valores intermedios 2, 3, 5, 6... etc. determinan los senos de los ángulos de 30º, 60º, etc.

Fig. 125 b

Trazado de la curva trigonométrica (cosenoide).

Para su trazado procederemos de la misma forma que lo estudiado en la Fig. 125.

NOTA: En este caso, los valores en C y F correspondientes a 0º y 360º, su valor será (+1).
El valor en F corresponderá a 180º, cuyo valor es (-1).

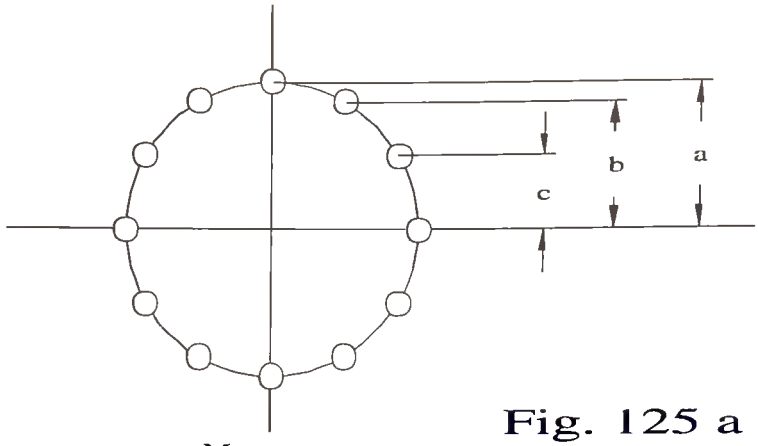


Fig. 124

Fig. 125 a

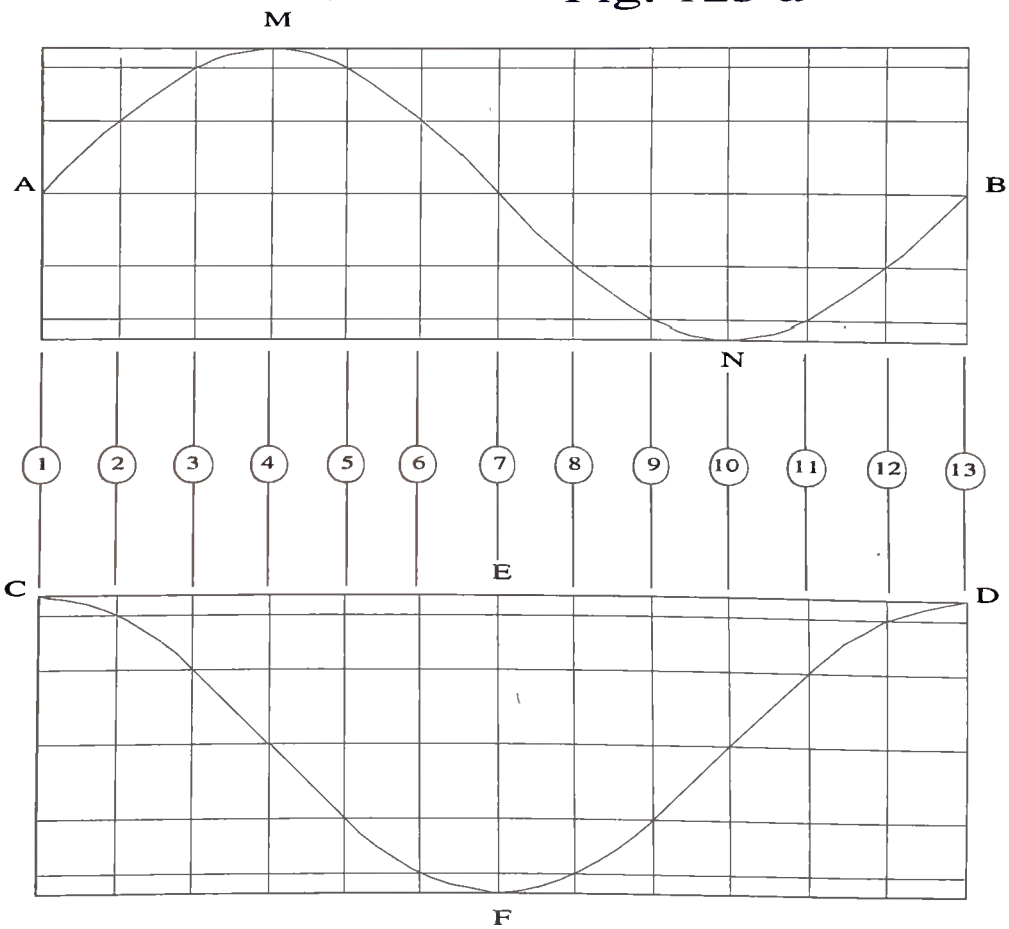


Fig. 125 b

Fig. 126

Trazar una curva "BAO".

Este tipo de curvas tiene su aplicación, especialmente, en construcción naval, ya que los baos en los buques son los elementos transversales que sostienen y refuerzan la cubierta, apoyándose en los costados. Podemos decir que en la sección transversal de un buque, su cubierta tiene forma de tipo parabólico.

Fig. 126 a

1.º Trazamos una semicircunferencia, cuyo radio E4 sea igual al valor de la brusca, obteniéndose los puntos A e I.
2.º Dividimos el segmento AI en un número cualquiera de partes (en nuestro caso en 8), obteniéndose los puntos B, C, D, E, F, G y H.
3.º Dividimos la semicircunferencia trazada en el apartado 1.º en el mismo número de partes (en nuestro caso 8), obteniéndose los puntos 1, 2, 3, 4, 3, 2 y 1.
4.º Unimos los puntos 1 y B, 2 y C, 3 y D, 4 y E, 3 y F, 2 y G, 1 y H, obteniéndose los segmentos 1B, 2C, 3D, 4E, 3F, 2G y 1H. (Continúa en la Fig. 126 b.)

Fig. 126 b

En la Fig. 126 b, los puntos A e I serán los de intersección de la cubierta con los del costado del buque.

La distancia E4 es el valor de la elevación de la cubierta del buque respecto de sus puntos de apoyo A e I en el costado, que denominaremos brusca.

Para trazar la curva "bao", procederemos de la siguiente forma:

1.º Trazamos el segmento AI igual al valor de la manga o distancia entre los costados del buque.
2.º Trazamos la mediatriz del segmento AI, obteniéndose el punto E.
3.º Por el punto (E) trazamos la perpendicular al segmento AI, y, sobre éste, llevamos el valor de la brusca, obteniéndose el punto (4).
4.º Dividimos el segmento AI en el mismo número de partes que en la Fig. 126a (en nuestro caso en 8), obteniéndose los puntos B, C, D, E, F, G y H.
5.º Por los puntos obtenidos en el apartado 4.º, trazamos perpendiculares al segmento AI y, sobre ellas, llevamos las medidas B1, C2, D3, etc., obtenidos en la Fig. 126 a.
6.º La unión ordenada de los puntos A, 1, 2, 3, 4... I, de la Fig. 126 b definirá la curva bao, solución del problema.

Fig. 127

Trazar una curva "BAO" (Segundo procedimiento).

1.º Trazar el rectángulo ACDE y su eje de simetría MN.
2.º Dividir en un número de partes iguales el eje MN (en nuestro caso en 7).
3.º Dividir en un número de partes iguales el lado AC (en nuestro caso en 14, doble que MN).
4.º Por las divisiones obtenidas en el segmento AC, trazamos perpendiculares a éste.
5.º Los puntos A y C lo unimos por rectas con las divisiones obtenidas en el segmento MN.
6.º Los puntos de intersección de las rectas trazadas en los apartados 5.º y 6.º, debidamente unidos, nos determinarán la curva bao, solución del problema.

Fig. 126 a

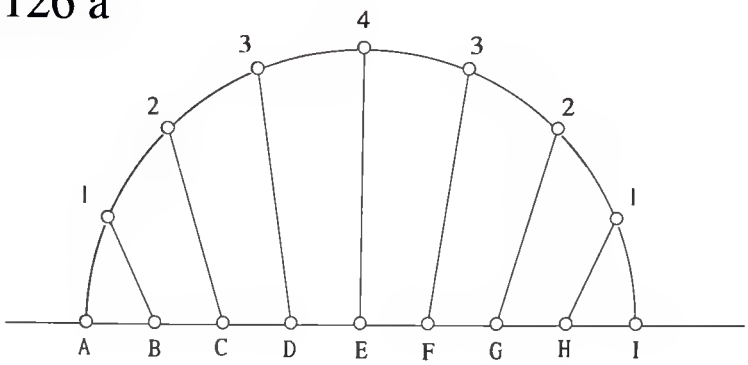


Fig. 126 b

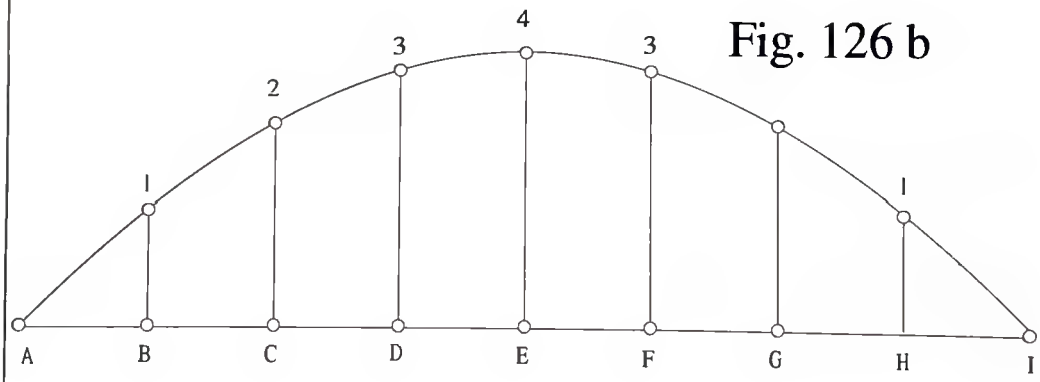
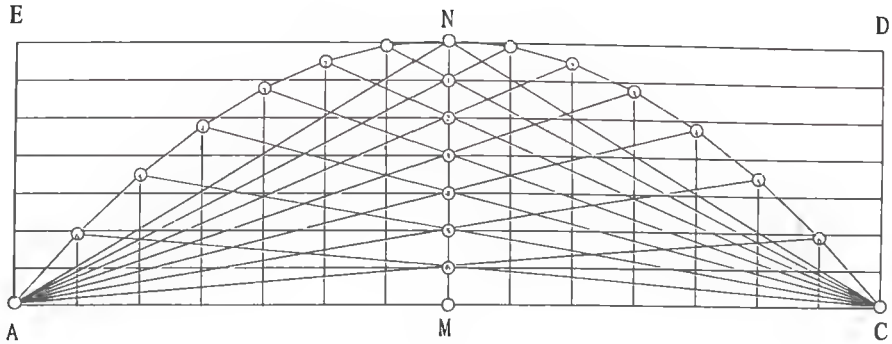


Fig. 127



CICLOIDE. DEFINICION

Es una curva plana, lugar geométrico de las distintas posiciones que ocupa un punto de una circunferencia (Ruleta), que rueda sin resbalar sobre una recta base.

Los cicloides pueden ser normales, acortadas o alargadas.

Fig. 128

TRAZADO DE LA CICLOIDE

1.º Trazamos el segmento 7-7, igual al desarrollo de la ruleta. (Recta base.)
2.º Dividimos en cualquier número de partes (en nuestro caso 12) tanto la ruleta como ésta rectificada, es decir, el segmento 7-7.
3.º Trazamos circunferencias tangentes a la recta base, de diámetro igual al de la ruleta, que pasen por cada una de las divisiones del apartado 2.º
4.º Trazamos rectas paralelas a la recta base, por cada una de las divisiones de la ruleta.
5.º La intersección entre las rectas del apartado 4.º y las circunferencias del apartado 3.º nos darán los puntos 1, 2, 3..., etc., que, unidos ordenadamente, determinarán la cicloide, solución del problema.

CICLOIDE ALARGADA Y ACORTADA

1.º Si unimos un punto cualquiera, como el 12 de la cicloide normal, con el punto 12 de la proyección ortogonal sobre el eje de la ruleta, trazado a partir de la recta base, obtendremos la recta 12-12.
2.º Los segmentos 12c y 12C determinarán los puntos c y C, correspondientes a los de las cicloides acortadas y alargadas, respectivamente.
3.º Siguiendo el procedimiento explicado en los apartados 1.º y 2.º y unidos ordenadamente los distintos puntos obtenidos, nos darán las cicloides acortadas o alargadas, solución del problema.

CARDIOIDE. DEFINICION

Es una curva cíclica, engendrada por una circunferencia denominada ruleta, que rueda sin resbalar sobre otra llamada base. (Recibe el nombre por su forma de corazón.).

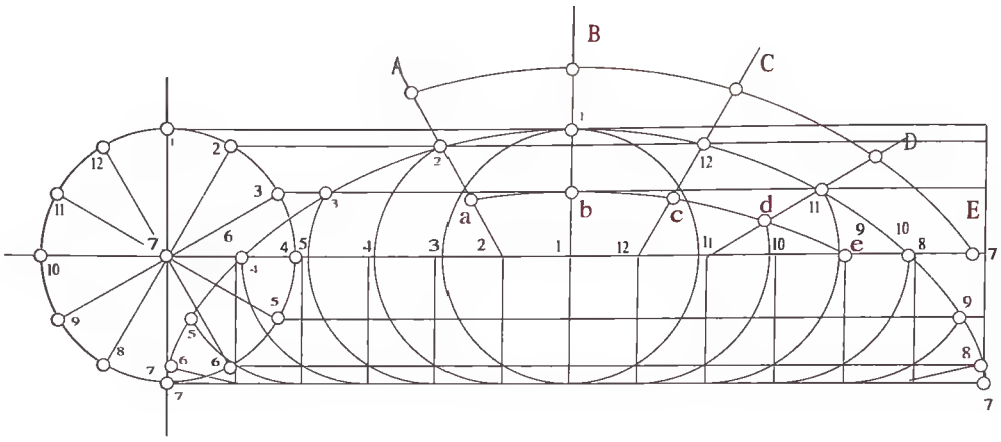
NOTA: Las dos circunferencias deben tener el mismo radio.

Fig. 129

TRAZADO DE LA CARDIOIDE

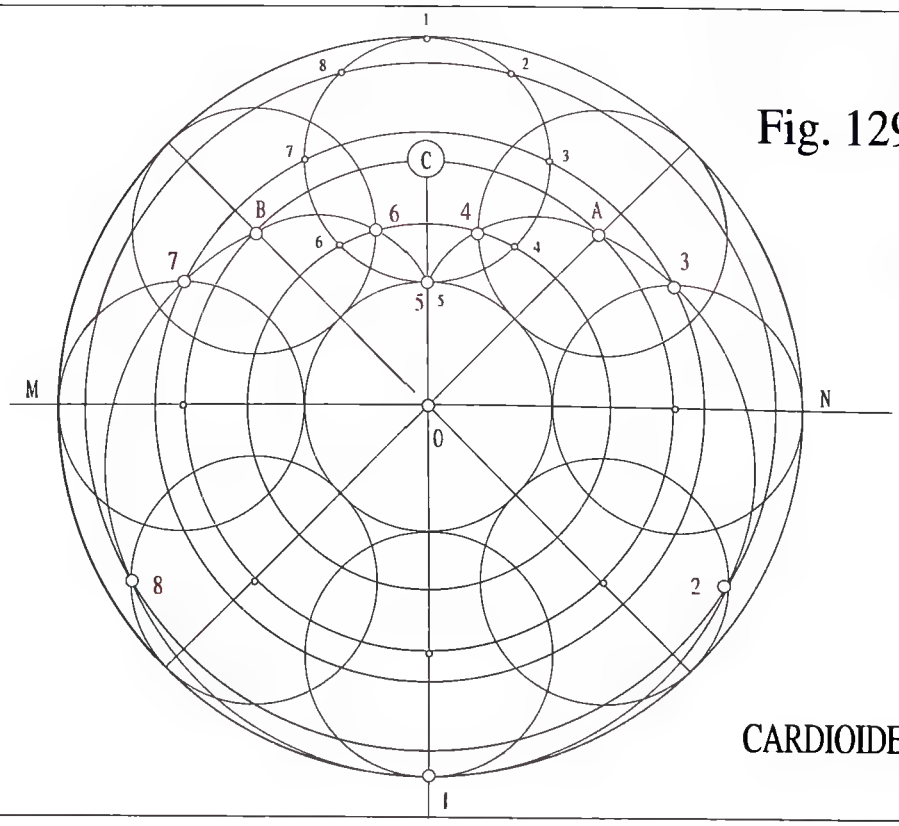
1.º Trazar el segmento MN y por su punto medio (O) trazar una perpendicular.
2.º Por el punto O trazar una circunferencia de centro (O), que cortará en el punto 5 al eje 1-1.
3.º Con centro en el punto C, trazamos otra circunferencia del mismo diámetro que la anterior.
4.º Dividimos la circunferencia de centro C en un número de partes iguales (en nuestro caso en 8), obteniéndose los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.
5.º Con centro en el punto O, trazamos círculos que pasen por los puntos 1, 2 u 8, 3 ó 7 y 4 ó 6.
6.º La circunferencia de centro (c) rodará sobre la circunferencia de centro (O), haciendo estación en 8 puntos.
7.º Los puntos 5, 4, 3, 2, 1, 8, 7 y 6 de intersección entre las circunferencias trazadas en los apartados 5.º y 6.º, unidos ordenadamente, determinarán la curva cardioide, solución del problema.

Fig. 128



TRAZADO DE LA CICLOIDE

Fig. 129



CARDIOIDE

EPICICLOIDE. DEFINICION

Es una curva plana, lugar geométrico de las distintas posiciones de un punto de una circunferencia (Ruleta), que rueda sin resbalar alrededor de otra circunferencia, que denominaremos directriz.

Fig. 130

TRAZADO DE LA EPICICLOIDE

1.º Trazamos la circunferencia (Directriz) de centro (O) y radio cualquiera, en nuestro caso (O-12), y la dividimos en un número de partes (en nuestro caso en 24).
2.º Trazamos las circunferencias (Ruleta), tangentes a la (Directriz).
3.º Dividimos la circunferencia (Ruleta) en 12 partes, obteniéndose los puntos 1, 2, 3... 12.
4.º Con centro en (O) y radios (O-6) - (07 = 05) - (08 = 04) - (09 = 03) - (0-10 = 02) y (0-11 = 01), trazamos circunferencias concéntricas a la Directriz.
5.º Sobre el segmento MN podemos observar los puntos (ROJOS) 1 a 12 que, unidos ordenadamente, nos darán la curva, solución del problema.

NOTA: Para obtener las "EPICICLOIDES ALARGADAS o ACORTADAS" seguiremos el procedimiento estudiado en la Fig. 128.

Fig. 131

Trazar una espiral jónica o voluta.

1.º Trazamos un cuadrado cualquiera de vértices AMNP y las mediatrices de sus lados, obteniéndose los segmentos 9-11 y 10-12.
2.º Dividimos los segmentos anteriores en cualquier número de partes, en nuestro caso en 6, obteniéndose los puntos 1 a 12.
3.º Trazamos mediatrices a los segmentos PM y AN debiéndose prolongar.
4.º Con centro en el punto 1 y radio 1A, trazamos el arco (AB).
5.º Con centro en el punto 2 y radio 2B, trazamos el arco (BC).
6.º Con centro en el punto 3 y radio 3C, trazamos el arco (CD) y con centro en el punto 4 trazamos el arco DE.
7.º La unión ordenada de los puntos A, B, C, D y E será la solución del problema.

Fig. 132

Trazar la Espiral de Arquímedes, conociéndose su paso y número de vueltas (en nuestro caso 2 vueltas).

1.º Trazamos una circunferencia, cuyo radio sea igual al paso de la espiral multiplicado por el número de vueltas (en nuestro caso 2 vueltas).
2.º Dividimos la circunferencia en cualquier número de partes (en nuestro caso 8), que la cortarán según los segmentos (1-5), (2-6), (3-7) y (4-8), cuyas intersecciones será el punto (O), centro de la circunferencia.
3.º Dividimos el radio OA en dos semisegmentos OB y BA.
4.º Cada semisegmento OB y BA se dividirán en 8 partes, que cortarán al radio OA en 16 puntos.
5.º Las circunferencias de centro O, concéntricas y cuyos radios pasan por los puntos del apartado 4.º, cortarán a los segmentos (1-5), (2-6), (3-7) y (4-8) en una serie de puntos que, unidos ordenadamente, determinarán la Espiral de Arquímedes, solución del problema.

TRAZADO DE LA EPICICLOIDE

Fig. 130

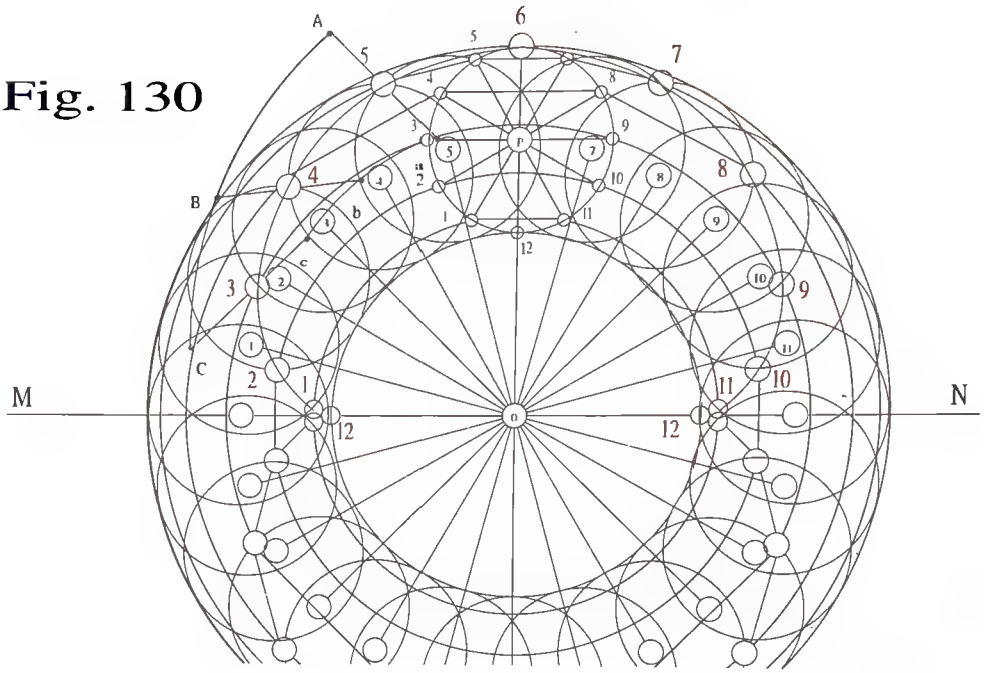
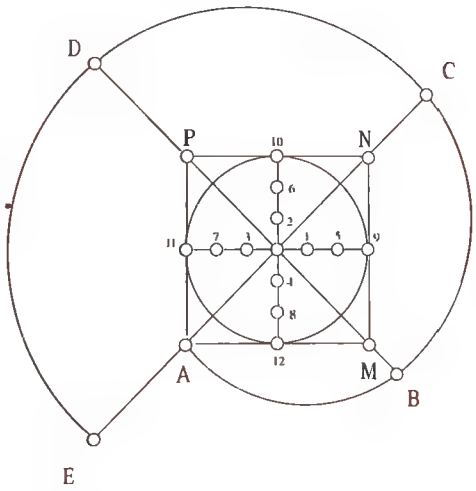
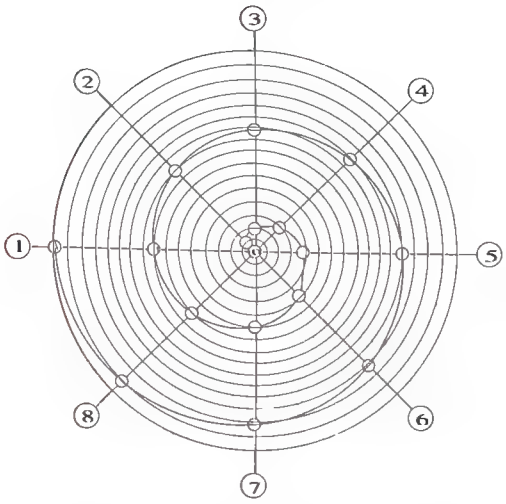


Fig. 131



ESPIRAL JONICA O VOLUTA

Fig. 132



ESPIRAL DE ARQUIMEDES

ENGRANAJES

1.º Entenderemos por Engranaje, al conjunto de dos o más ruedas dentadas que engranan entre sí, permitiendo el movimiento rotacional.

2.º El movimiento rotacional es el descrito por un punto (P) que se desplaza siguiendo una trayectoria circunferencial, haciendo posible el giro de ruedas, ejes, volantes, etc., elementos fundamentales de cualquier máquina.

3.º El movimiento rotacional lo podemos conseguir por medio de dos cilindros que tengan sus ejes paralelos, Fig. 133 a.
Cuando la distancia entre los ejes de los cilindros sea mayor que la suma de sus radios, la transmisión se efectuará por una correa o cremallera, y cuando la suma de sus radios sea igual a la distancia entre los ejes, no será necesaria la aportación de la correa o cremallera, pero deben estar suficientemente presionados, para evitar el deslizamiento, Fig. 133 b.

4.º Consideraremos como engranaje, al conjunto de dos ruedas (conductora) y (conducida) que, en su periferia, tengan una serie de entrantes y salientes que se adapten entre sí para poder, sin rozamiento, transmitir de una a otra el movimiento rotacional.

5.º Antes de proceder al dibujo de un engranaje, Fig. 134, expondremos los conceptos y fórmulas más fundamentales para poder representarlo.

a) Dos ruedas dentadas "conductora y conducida" podrán engranar cuando sus "módulos" sean iguales. Entendemos por «modulo" la relación entre el "diámetro primitivo" y el "número de dientes".

$$\text{Módulo (m)} = \frac{\text{(d) diámetro primitivo}}{\text{(z) número de dientes}}$$

En el caso de la Fig. 133 b, las ruedas conductoras y conducidas tienen un punto de tangencia (T). Sus diámetros primitivos serán (AT) y (TB). La distancia O_1 O_2 será igual a la separación entre ejes.

b) Analizando el diente de un engranaje, podemos considerar que está limitado por circunferencias concéntricas, que denominaremos "circunferencia de cabeza" y "circunferencia de pie".

- La altura de la cabeza del diente (a) = m.
- La altura del pie del diente (b) = 1,25 m.
- Diámetro exterior de = m(z + 2).
- Diámetro interior di = m(z – 2,5).
- Altura total del diente h = 9m/4 = 2,25 x m.
- Relación entre el espesor del hueco y del diente: 19/40 a 21/40.

- Espesor del diente = 19/40 m X π.
- Espesor del hueco = 21/40 m X π.
- Paso circunferencial = p = m X π.

NOTA: Para facilitar al alumno el trazado de un engranaje, expondremos un ejemplo basándonos en las fórmulas anteriores y en el Odontógrafo de GRANT, cuya tabla ajustamos. Ver pág. 118.

Fig. 133a

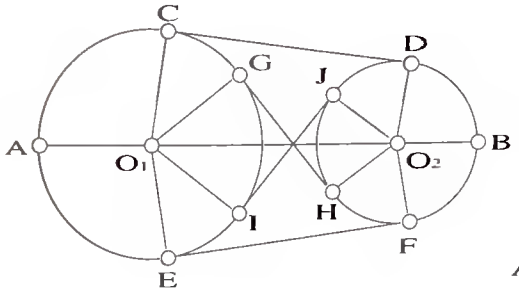


Fig. 133b

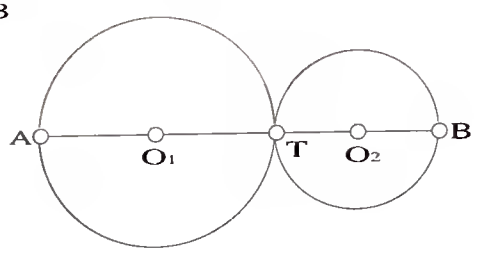
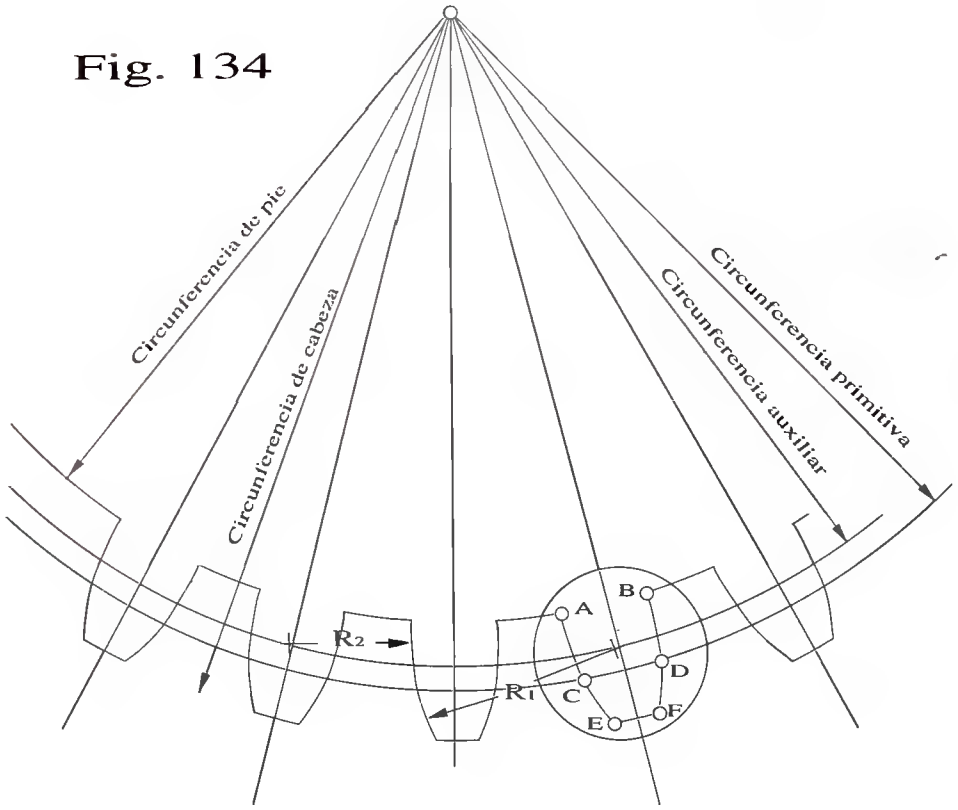


Fig. 134



EJERCICIO PRACTICO

Hallar los datos para trazar una rueda dentada, en base a los siguientes datos (Ver fig. 134) fuera de escala:

DATOS: Número de dientes: $Z = 25$
Diámetro primitivo: $dp = 225$ m/m

1.º Módulo $m = \frac{dp}{Z} = 225/25 = 9$.
2.º Diámetro de la circunferencia auxiliar (da) = dp X 0,9659 = 217,3275 m/m. (0,9659 = constante).
3.º Altura de la cabeza del diente = a = m = 9 m/m.
4.º Altura de la base del diente = b = 1,25 m = 11,25 m/m.
5.º Diámetro de la circunferencia de cabeza = dp + 2a = dp + 2m = 243 m/m.
6.º Diámetro de la circunferencia de pie = dp – 2b = dp - 2,5 m = 202,5 m/m.
7.º Espesor del diente $e_s = 19/40\ m X \pi = 13{,}43$ m/m
8.º Espesor del hueco $e_h = 21/40\ m X \pi = 14{,}84$ m/m.
9.º Utilizando el odontógrafo de Grant podemos obtener los valores del radio de cabeza R_1 y del radio de enlace R_2.

R_1 = Al valor de (a) de la Tabla multiplicado por el módulo (m).
R_2 = Al valor de (b) de la Tabla multiplicado por el módulo (m).

ODONTOGRAFO DE GRANT

z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2,28	2,40	2,51	2,62	2,72	2,82	2,92	3,02	3,12	3,22	3,32
b	0,69	0,83	0,96	1,09	1,22	1,34	1,46	1,58	1,69	1,79	1,89

z	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
a	3,41	3,49	3,57	3,64	3,71	3,78	3,85	3,92	3,99	4,06	4,13
b	1,98	2,06	2,15	2,24	2,33	2,42	2,50	2,59	2,67	2,76	2,85

z	32	33	34	35	36	De	De	De	De	De
a	4,20	4,27	4,33	4,39	4,45	37 a 40	41 a 45	46 a 51	52 a 60	61 a 70
b	2,93	3,01	3,09	3,16	3,23	4,20	4,63	5,06	5,74	6,52

z	De 71 a 90	De 91 a 120	De 121 a 180	De 181 a 300
a	7,72	9,78	13,38	21,62

Escalas y ábacos

ESCALAS

La representación gráfica de un determinado objeto, en muchos casos, no podemos dibujarlo a su verdadero tamaño.

a) Si pensamos en la representación de la disposición general de un buque de 300 metros de eslora, necesitaríamos un trozo de papel de 300 metros de largo como mínimo.
b) Si pensamos en la representación de la maquinaria de nuestro reloj de pulsera, nos bastaría con un formato del tamaño de una tarjeta de visita.
c) La representación de los cuerpos debe ser lo suficientemente clara para que pueda ser interpretada, correctamente y, como consecuencia de esto, tanto los objetos grandes como los pequeños, deberemos representarlos y definirlos en una superficie plana, de tal forma que puedan ser visualizados con la mayor claridad.
d) Para solucionar los problemas de representación que se pueden producir en los apartados a) y b), disponemos de un sistema que denominaremos ESCALA.

e) $$\text{ESCALA} = \frac{\text{DIBUJO DEL OBJETO REPRESENTADO}}{\text{DIMENSION REAL DEL OBJETO}}$$

Las escalas pueden ser de ampliación o de reducción. Cuando el dibujo del objeto representado sea mayor que el objeto en la realidad, la escala será de ampliación, pudiendo tener cualquier valor, siendo los más generalizados E= 2/1 - 5/1 - 10/1 - 25/1 - 50/1 ... etc.

Cuando el dibujo del objeto representado sea menor que el objeto en la realidad, la escala será de reducción, pudiendo tener cualquier valor, siendo los más generalizados E= 1/2 - 1/5 - 1/10 - 1/25 - 1/50 - 1/100 ... etc.

ESCALA VOLANTE Fig. 135

1.º Trazamos el rectángulo A B D C y la mediatriz MN de sus lados AB y CD.
2.º Dividimos en 10 partes los lados AC y BD, obteniéndose una serie de rectas paralelas a los lados AB y CD del rectángulo.
3.º Dividimos el lado AB del rectángulo en 20 partes, quedando dividido el segmento AM en 10 partes, 1,2,3 ... 10.
4.º Unimos el punto C con las divisiones 1,2,3... 10 del segmento AM.

NOTA: El segmento AB = CD tendrá 100 milímetros. Los segmentos AC = BD podrán tener cualquiera dimensión.

5.º El segmento CD corresponderá a la escala 1/1, mientras que el segmento BM corresponderá a la escala 1/2, ya que CD = 100 m/m y BM = 50 m/m.

NOTA: Los segmentos paralelos entre sí y perpendiculares al segmento BD = AC en su intersección con los rayos vectores (C-1) (C-2) ... etc determinarán distintas escalas como $^5/_{100} = {}^1/_{20}$, $^{25}/_{100} = {}^1/_4$ - etc.

ESCALA DECIMAL Fig. 136

Considerando los segmentos BD = DF = FH = 100 unidades, podemos obtener gráficamente la centésima parte de cada uno de estos segmentos.

La Fig 136 en el rectángulo EFHG, muestra el segmento de 34 unidades (columna 3, fila 4), y el segmento de 68 unidades (columna 6, fila 8).

Fig. 135

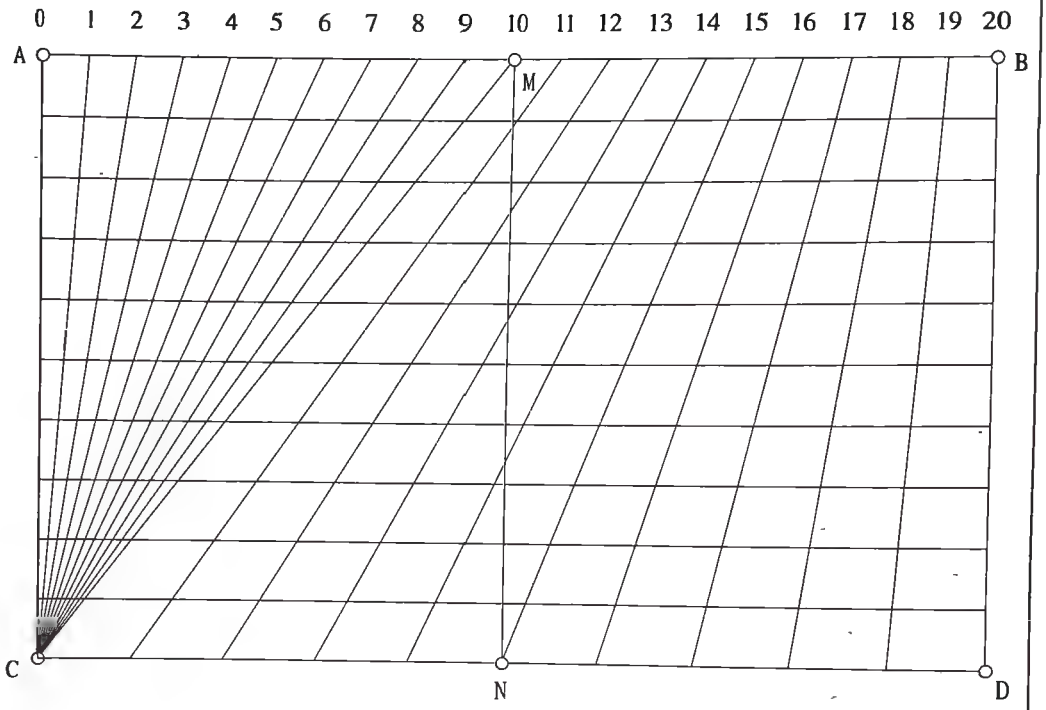
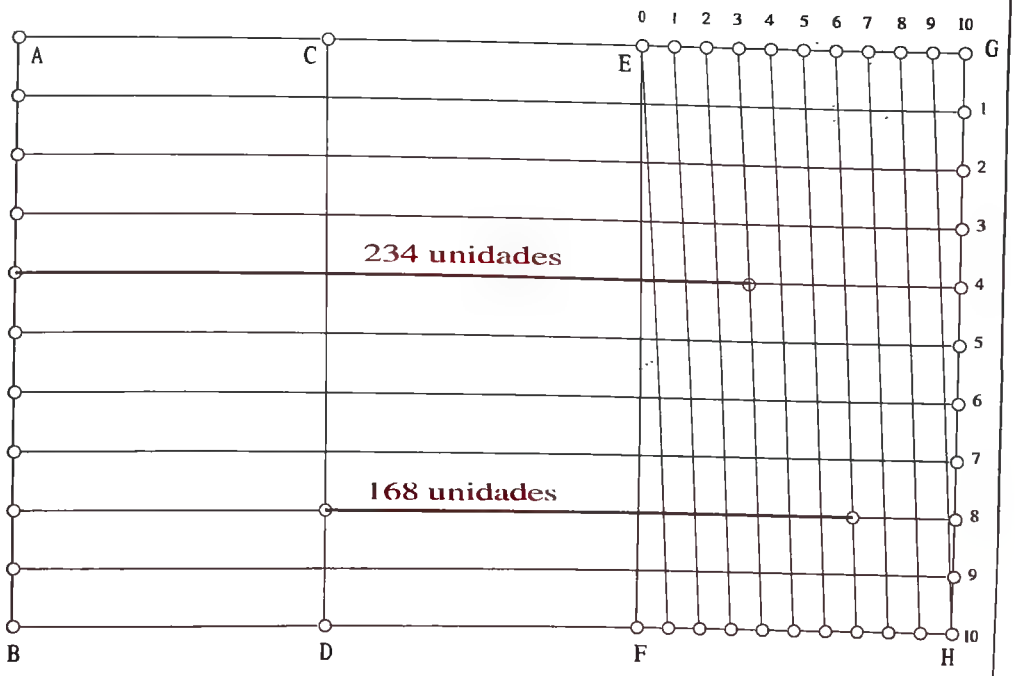


Fig.136



TRIANGULOS UNIVERSALES DE ESCALAS

Fig. 137

1.º Trazamos el triángulo equilátero (V-10-10) de 100 m/m de lado.

2.º Dividimos su base (10-10) en 10 partes iguales, obteniéndose los puntos 1, 2, 3 ... etc.

3.º Dividimos su altura (V5) en 10 partes iguales y trazamos, por ellas, paralelas a la base (10-10).

4.º Las medidas de los segmentos, tomadas entre los lados del triángulo, paralelos a su base (10-10), nos darán las distintas escalas, que pueden ser de reducción o de ampliación, según se tomen sobre o bajo el segmento (10-10), base del triángulo.

5.º En la Fig. 137 hemos representado los segmentos que corresponden a las escalas 1/5 - 1/2 - 1/1,25 - 1/1 y 1,2/1.

Fig. 138

También podemos obtener un triángulo universal de escalas, utilizando un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos tengan un valor de 100 m/m.

En nuestro caso, el triángulo será el formado por los vértices (V-10-10), siendo sus catetos los lados (V-10) y (10-10). La hipotenusa será el segmento (V-10).

El procedimiento a seguir será el siguiente:

a) Dividimos tanto el cateto (V-10) como el (10-10) en diez partes iguales (pudiéndose emplear el sistema estudiado en la Fig. 13), obteniéndose los puntos 1, 2, 3 ... etc., en cada uno de los catetos.

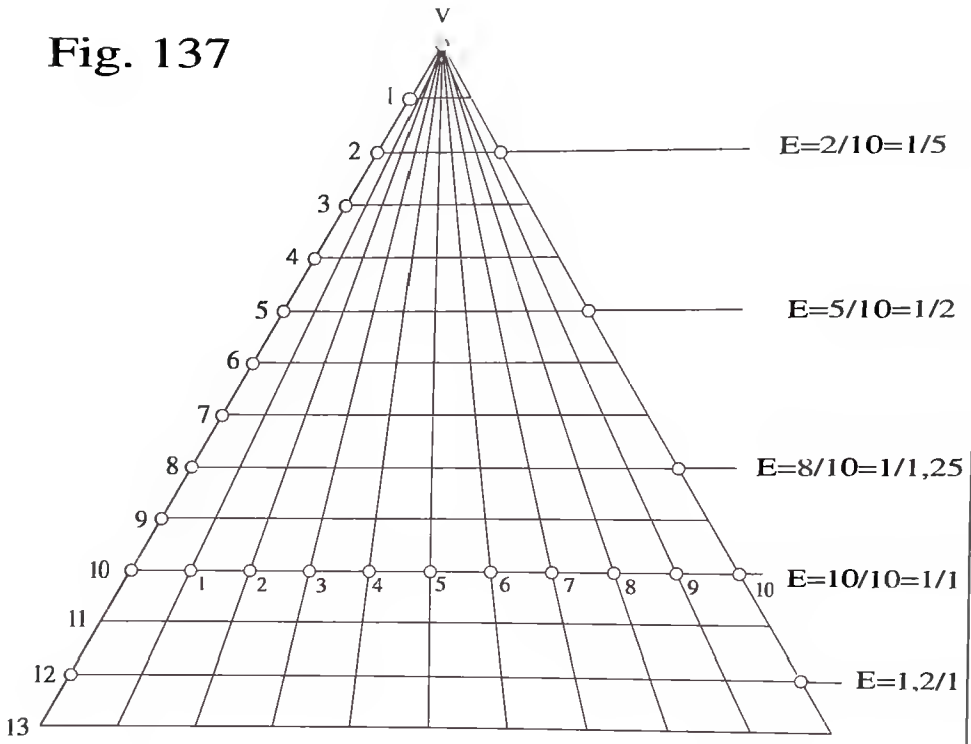
b) Unimos el vértice V con cada uno de los puntos 1, 2, 3 ... etc de la base.

c) Trazamos por los puntos 1, 2, 3 ... etc., paralelas a la base del triángulo (10-10), que cortarán a la hipotenusa (V-10) en una serie de puntos.

d) Las medidas de los distintos segmentos, comprendidos entre el cateto vertical (V-10) y la hipotenusa (V-10) determinarán las distintas escalas.

e) En la Fig. 138 hemos representado los segmentos que corresponden a las escalas: 1/10 - 1/3 - 1/2,5 - 1/1,25 - 1/1.

Fig. 137



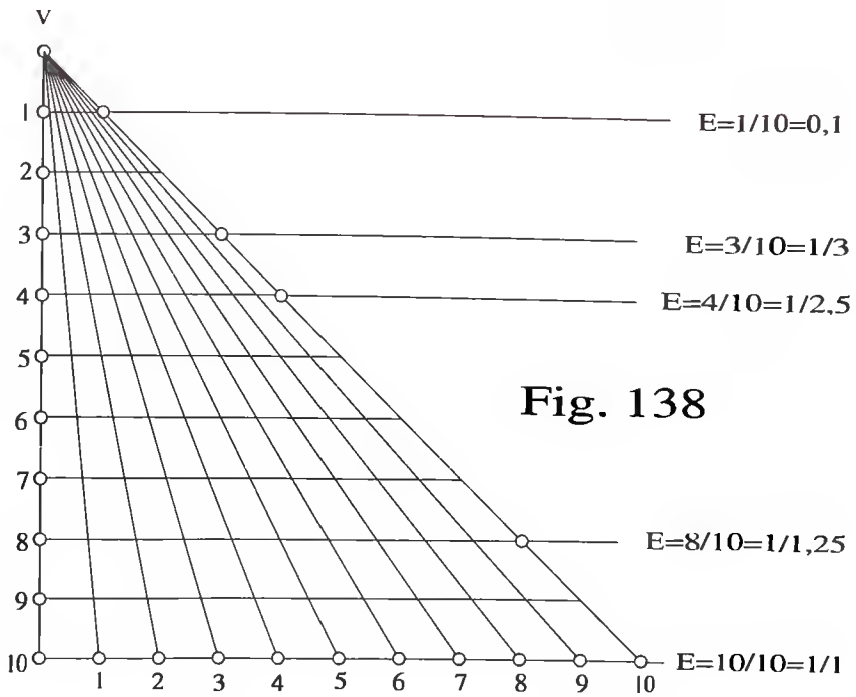


Fig. 138

Fig. 139

Enlazar los segmentos PM y PN por medio de un arco parabólico, conocidos sus puntos de tangencia M y N.

1.º Dividimos el segmento PM en un número cualquiera de partes (en nuestro caso en 12), obteniéndose en dicho segmento los puntos 1, 2, 3 ... etc.
2.º Dividimos el segmento PN en el mismo número de partes que el segmento PM, obteniéndose en éste los puntos 1, 2, 3 ... etc.
3.º Unimos el punto N con los puntos 1, 2, 3 ... etc,. del segmento PM obtenidos en el apartado 1º.
4.º Unimos el punto M con los puntos 1, 2, 3 ... etc,. del segmento PN, obtenidos en el apartado 2º.
5.º La unión ordenada de los puntos de intersección de los vectores (M-1) y (N-1), (M-2) y (N-2), (M-3) y (N-3), etc., determinarán la curva, solución del problema.

Fig. 140

Enlazar los segmentos PM y PN por medio de un arco parabólico, conocidos sus puntos de tangencia M y N.

Este caso, deberá ser resuelto según lo estudiado en la Fig. 139.

Las diferencias entre las Figs. 139 y 140, estriban en que los segmentos PM y PN, en el caso de la Fig. 140, son desiguales y forman un ángulo obtuso, mientras que en la Fig. 139 los segmentos PM y PN son iguales, formando un ángulo de 90º.

Fig. 141

Trazar un arco de circunferencia por medio de puntos (supondremos conocidos los puntos A, B y C).

NOTA: Este ejercicio puede ser aplicable al trazado de la cubierta de un buque, similar a lo estudiado en la Fig. 127 (curva "bao").

1.º Trazamos un rectángulo de base AB y altura DC.
2.º Unimos A con C y al segmento AC le trazamos la perpendicular por el punto A, que cortará en el punto E a la prolongación del lado superior del rectángulo trazado en el apartado 1.º.
3.º Dividimos el segmento DA y el CE en el mismo número de partes (en nuestro caso en cinco).
4.º Dividimos la altura del rectángulo DC en el mismo número de partes (en nuestro caso en 5).
5.º Siguiendo los procedimientos estudiados en las Figs. 139 y 140, obtendremos los puntos de intersección que, unidos ordenadamente, nos darán la curva, solución del problema.
6.º En este caso los puntos que determinan la curva "Bao» son las de intersección entre los segmentos (C-1 y 1-1), (C-2 y 2-2), (3-3 y 3-3) ... etc.

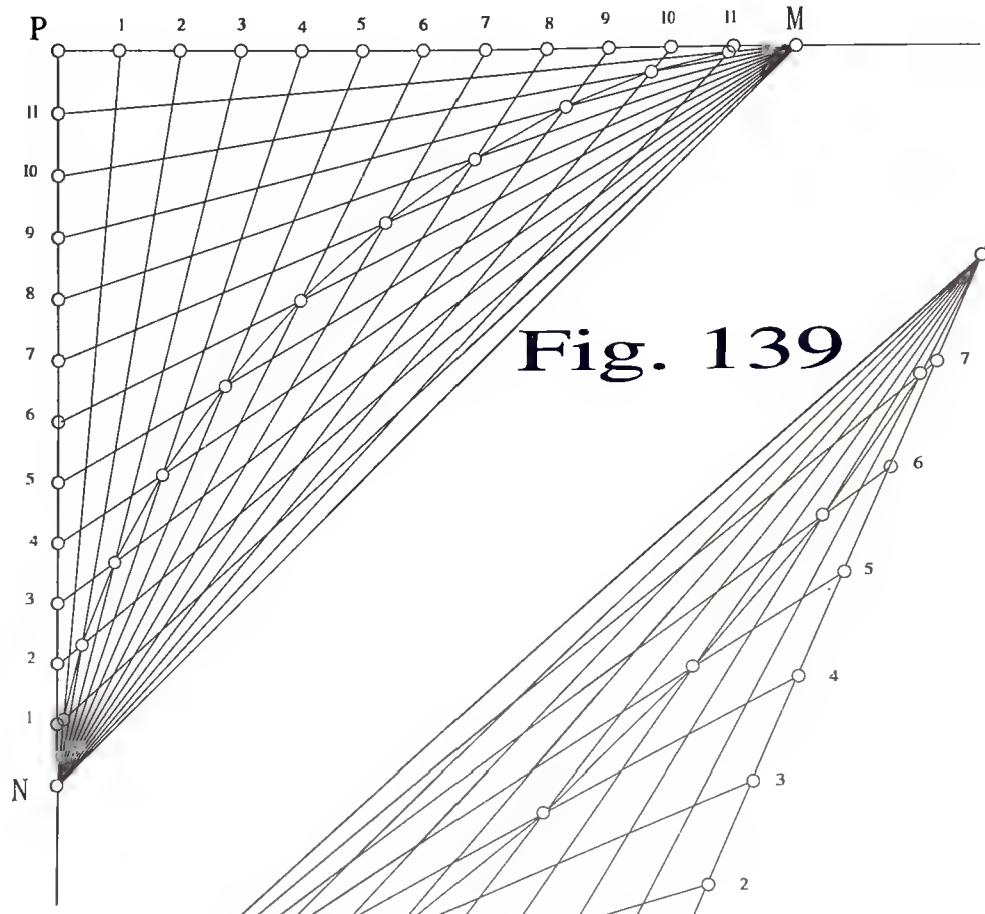


Fig. 139

Fig. 140

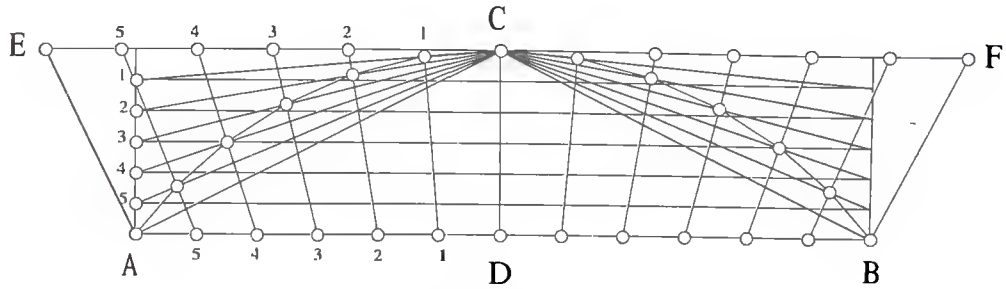


Fig. 141

JAR'23

Rectificación de curvas, arco capaz y aplicación de tangencias

Fig. 142

Rectificar las curvas limitadas por los puntos (M-N) y (A-B).

1.º Trazamos las rectas r y s, de origen M' y A'.
2.º Con el auxilio del compás y, a partir de los puntos M y A, trazamos pequeños arcos, que cortarán a las curvas MN y AB en los puntos a, b, c, etc., respectivamente.
3.º A partir de los puntos M' y A' de las rectas r y s, trazamos las distancias Ma - ab - bc ... etc., ó Aa - ab - ac ... etc., obteniéndose los puntos N' y B' en las rectas r y s, respectivamente.

NOTA: Cuando los arcos son pequeños, su desarrollo es prácticamente igual a la cuerda que los limitan.

Fig. 143 a

Rectificar un cuadrante de circunferencia.

1.º Trazamos la circunferencia de centro (O) y radio OA = OM.
2.º Trazamos sus dos diámetros perpendiculares entre sí, MA y BC.
3.º Dividimos el radio OM en cuatro partes y obtenemos el punto P, equivalente a las tres cuartas partes del radio OM.
4.º Obtenemos el punto P' simétrico del P.
5.º Unimos el punto P' con B, debiéndose prolongar.
6.º Por el punto A, trazamos una perpendicular al diámetro MA.
7.º Las rectas trazadas en los apartados 5.º y 6.º tendrán un punto X de intersección.
8.º El segmento XA es el valor aproximado de la rectificación del cuadrante de la circunferencia dada, solución del problema.

Fig. 143 b

Rectificar un arco de circunferencia AQ, menor de 90º.

Seguiremos el procedimiento estudiado en la Fig. 143 a, con la única diferencia de unir el punto P' con el punto Q, siendo la solución del problema el segmento XA.

Fig. 144

Rectificar la circunferencia de centro O y diámetro MN.

1.º Trazar los diámetros AB y MN.
2.º Por el punto B trazar una recta (t), perpendicular al diámetro AB.
3.º Transportar sobre la recta (t) seis veces, el radio (r) de la circunferencia (ruleta), obteniéndose en dicha recta el punto P.
4.º Por los puntos M y N del diámetro de la circunferencia, trazamos arcos de radios MO y NO, que cortará a la circunferencia en los puntos X y Z, respectivamente.
5.º El segmento XZ cortará al diámetro AB en el punto Y.
6.º La unión de los puntos P e Y determinan el segmento cuyo valor aproximado se corresponde con el desarrollo de la circunferencia dada, solución del problema.

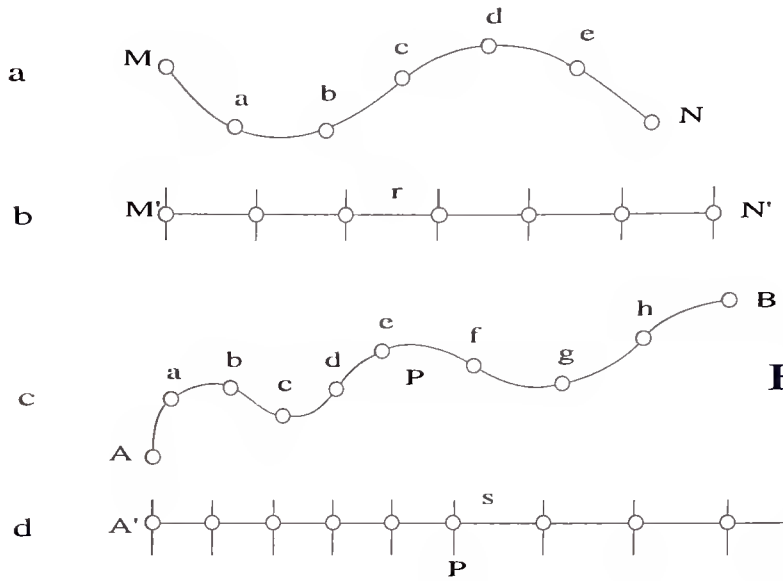


Fig. 142

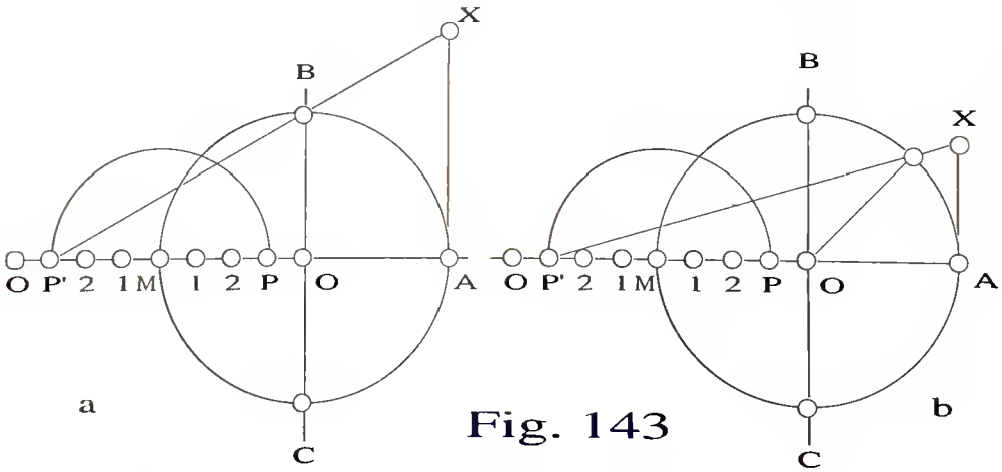


Fig. 143

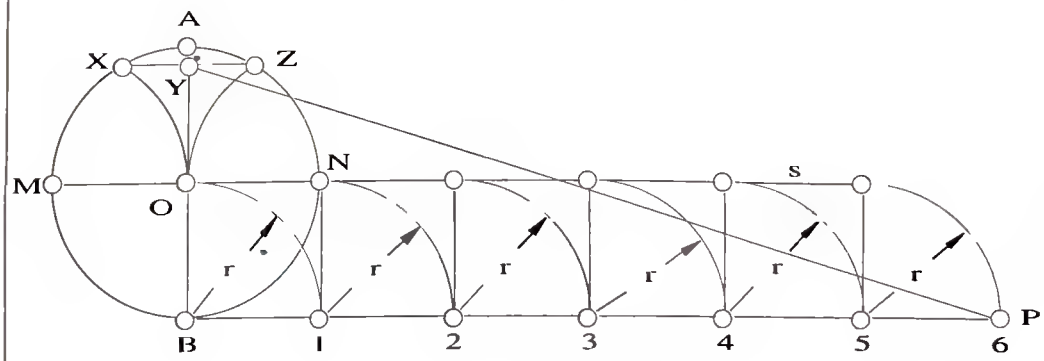


Fig. 144

Fig. 145

Hallar el arco capaz de un ángulo dado (X), respecto a un segmento dado AB.

1.º Reproducimos el ángulo dado (X) a partir del segmento AB, obteniéndose la recta (r).

2.º A partir del punto A, trazamos la recta (S), perpendicular a la recta (r).

3.º La recta (r) corta en el punto (O) a la mediatriz del segmento AB.

4.º Con centro en el punto (O) y radio OA = OB, trazamos un arco de circunferencia.

5.º Cualquier punto del arco trazado anteriormente, al ser unido por rectas con los puntos A y B, éstas formarán el ángulo dado (X); en todos los casos, siendo la solución del problema.

Fig. 146

Determinar un punto (P), exterior a dos segmentos consecutivos AB y BC, que pertenecen a la misma recta, desde el que ambos segmentos se vean bajo el mismo ángulo dado (X).

1.º Similarmente a lo estudiado en la Fig. 145, obtenemos el arco que pasa por los puntos A y B.

2.º Repetimos el procedimiento anterior para el segmento BC.

3.º Los arcos de circunferencia obtenidos en los apartados 1.º y 2.º se cortan en el punto (P).

4.º La unión de los puntos P con A y B, forman el ángulo dado (X).

5.º La unión de los puntos P con B y C, forman el ángulo dado (X).

6.º De acuerdo con las conclusiones anteriores, el punto P es la solución del problema.

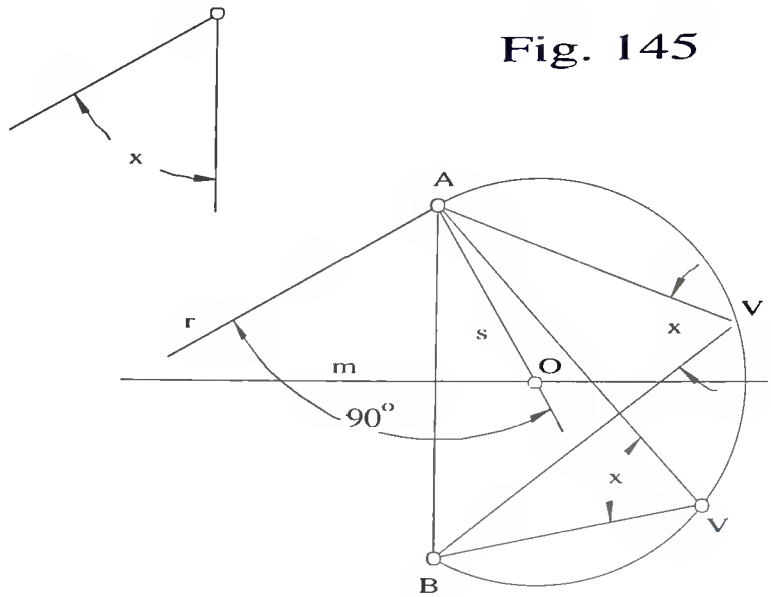


Fig. 145

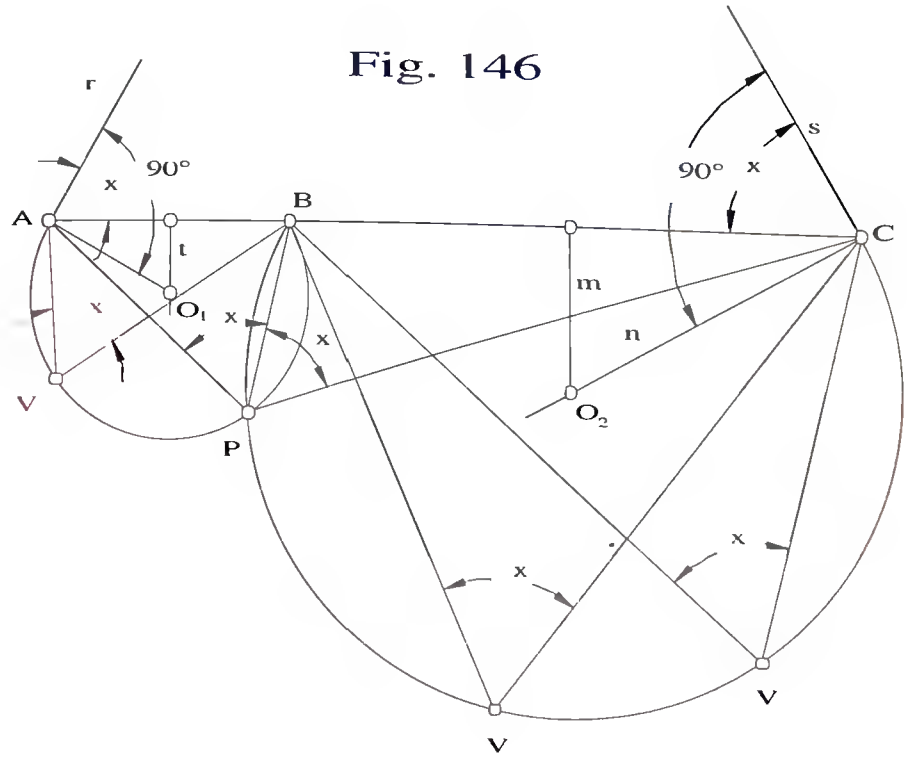


Fig. 146

APLICACIONES DE TANGENCIAS

GOLA DE DOS CUADRANTES

(Fig. 145 a y 145 b)

1.º Obtenemos el punto C, vértice del ángulo recto ACB.
2.º Unimos los puntos A y B.
3.º Por un punto cualquiera del segmento AB, en nuestro caso el T, trazamos las rectas perpendiculares a dicha moldura.
4.º La intersección de las rectas anteriores determinan los puntos O_1 y O_2.
5.º Los arcos de circunferencia de centros O_1 y O_2 trazados con radios $O_1A=O_1T$ y $O_2B=O_2T$ determinarán la curva gola, siendo A, T y B sus puntos de tangencia.

GOLA PROLONGADA

Fig. 145 c

1.º Trazamos el segmento AB y obtenemos su punto medio (O).
2.º Con centro en O y radio OA = OB trazamos una circunferencia.
3.º Con centro en A y B trazamos arcos de circunferencia de radios AO y BO que cortarán en los puntos M y N a la circunferencia dada.
4.º Con centro en los puntos M y N trazamos arcos de radio MA = MO y NB = NO respectivamente, que serán tangentes en los puntos A, O y B a la moldura.

GOLA INVERTIDA REBAJADA

Fig. 145 d

1.º Trazamos las mediatrices de los segmentos AT y TB, que cortarán en los puntos O_2 y O_1 a las perpendiculares trazadas por A y B a las rectas horizontales que limitan a la moldura en sus puntos arranque

ESCOCIA RECTA ELIPTICA

Fig. 146 a

1.º Unimos los puntos A y B.
2.º Trazamos una semicircunferencia de diámetro AB y la dividimos en cualquier número de partes (en nuestro caso en ocho).
3.º Proyectamos las divisiones sobre el segmento AB obteniéndose los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
4.º Por las proyecciones de los puntos obtenidos en el apartado 3.º trazamos paralelas a las horizontales de la moldura y sobre éstas se llevan los valores (7-7) - (6-6) - (5-5) - (4-4) ... etc.
5.º La unión de los puntos B - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 -1 y A determinarán la curva Escocia, solución del problema.

Fig. 145 a

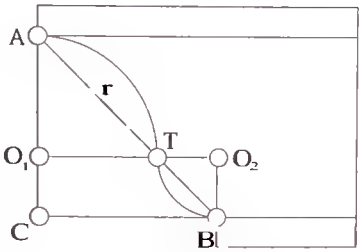


Fig. 145 b

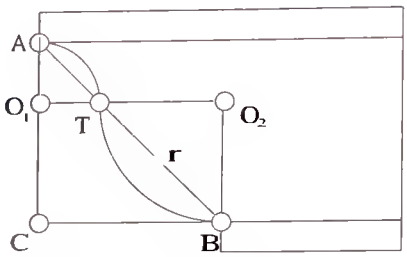


Fig. 145 c

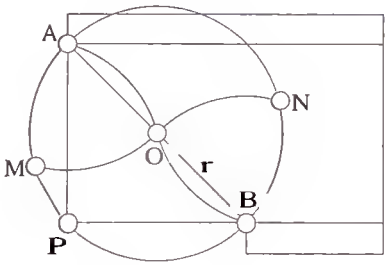


Fig. 145 d

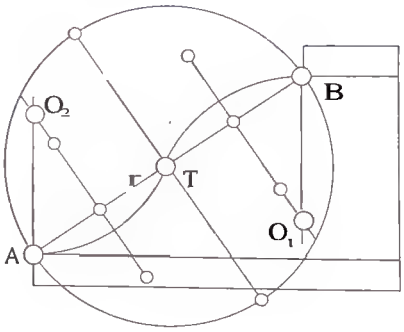
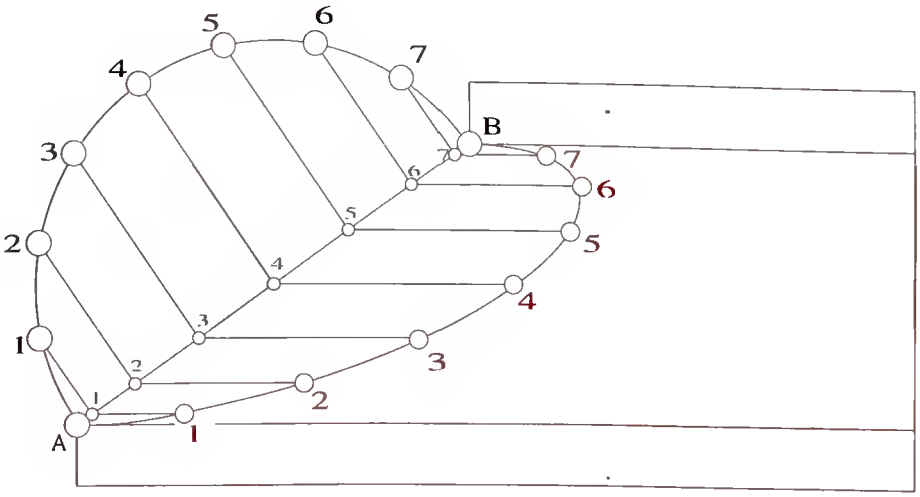


Fig. 146 a



JAR'23

Homología, afinidad y sus aplicaciones

HOMOLOGIA

La homología podemos considerarla como una transformación geométrica entre dos figuras planas, que frecuentemente utilizaremos en la geometría descriptiva.

Una homología podemos definirla a partir del conocimiento de los siguientes elementos:

a) El centro, el eje y dos puntos homólogos.

b) El centro, el eje y la recta límite de la figura que queremos conocer.

c) El centro y las dos rectas límites.

d) Dos pares de puntos y la dirección del eje.

Por medio de la homología, podemos transformar un cuadrilátero en un cuadrado o una circunferencia en elipse, parábola o hipérbola.

Fig. 149

Trazar un triángulo (A' B' C') que sea homólogo del dado (A" B" C"), conociéndose el punto (V), centro de la homología, el eje y el punto (A') homólogo del (A").

1.º Por el punto (V) trazamos rectas que pasen por los vértices dados A" B" y C", debiéndose prolongar éstos hasta traspasar el eje.

2.º Prolongamos los lados del triángulo A" B", A" C" y B" C" que cortan al eje en los puntos M, N y P, respectivamente.

3.º Unimos el punto A' con los M y N, obtenidos anteriormente por rectas que cortarán a las trazadas en el apartado 1.º en los puntos B' y C'.

4.º La unión de los puntos A' B' y C' determinan el triángulo homólogo del dado A", B" y C", solución del problema.

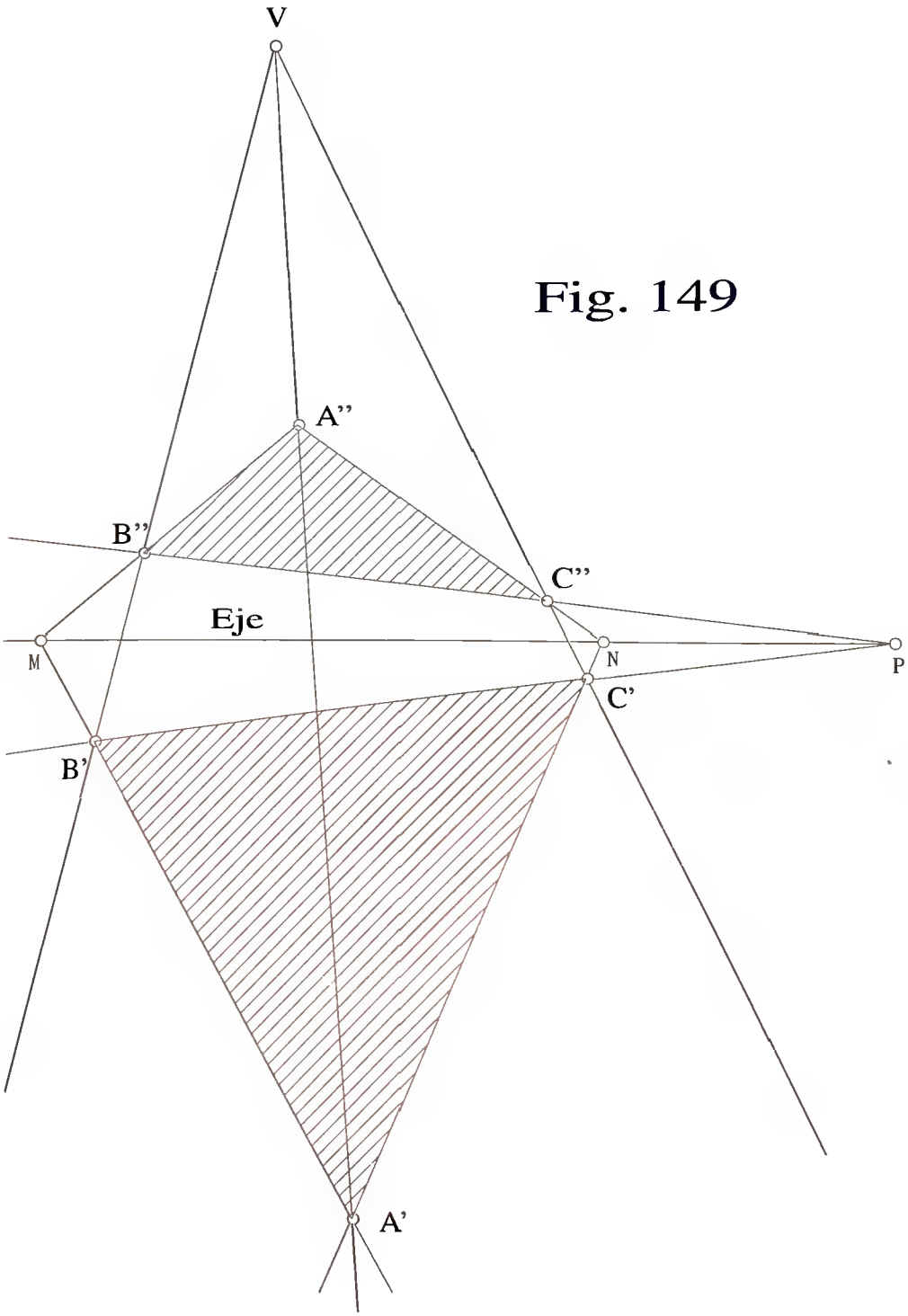


Fig. 149

HOMOLOGIA RECTAS (LIMITES)

Denominamos rectas límites a cada una de las rectas, lugar geométrico de los puntos del infinito (impropios) de cada figura homóloga.

Al tener dos figuras homólogas tendremos dos rectas límites.

Fig. 150

Hallar las rectas límites de los triángulos homólogos 1' 2' 3' y 1" 2" 3".

1.º Por V" trazamos la recta V"D, paralela a 1'3', hasta que corte a la prolongación de su homólogo 1"3" en D.

2.º Por D trazamos una paralela al eje, siendo ésta la recta límite (RL").

3.º Por V" trazamos la recta V"B, paralela a 2"3" y prolongamos el lado 2'3', hasta que corte a la anterior en el punto B.

4.º Por el punto B trazamos la paralela al eje, obteniéndose la recta límite RL'.

NOTA: Los apartados 2.º y 3.º serán la solución del problema.

Fig. 151

Las rectas límites son paralelas al eje, siendo la distancia del centro (V) a una de ellas (RL') igual a la distancia de la otra recta límite (RL") al eje.

Fig. 152

Las rectas límites pueden ser interiores respecto al centro V y al eje, como en el caso de la Fig. 151.

En el caso de la Fig. 152, las rectas límites RL' y RL" son equidistantes de V y del eje, respectivamente, siendo exteriores.

Fig.150

V''

Recta limite (RL'')

C

D

3''

1''

2''

B

Recta limite (RL')

A

Eje

F

2'

E

G

1'

3'

Fig. 151

V

Recta limite (RL')

Recta limite (RL')

Eje

Fig. 152

Recta limite (RL')

V

Eje

Recta limite (RL')

Fig. 153

Transformar mediante una homología el cuadrilátero 1-2-3-4 en un cuadrado 1' 2' 3' 4'.

1.º Prolongamos los lados (1-2) y (3-4), que se cortarán en el punto (a).
2.º Prolongamos los lados (2-3) y (1-4), que se cortarán en el punto (b).
3.º La unión de los puntos (a) y (b) determinan la recta límite.
4.º Unimos los vértices (1 y 3), así como (2 y 4), diagonales del paralelogramo. Ambas diagonales las prolongamos hasta que corten a la recta límite en los puntos (d) y (c), respectivamente.
5.º Con centro en la recta límite, trazamos las semicircunferencias, cuyos diámetros estén limitados por los puntos (c y d), así como (a y b). Ambas semicircunferencias se cortarán en el punto (O), centro de la homología. Las rectas (aO) y (dO) determinan las direcciones de los lados del cuadrado, homólogo del cuadrilátero dado.
6.º Trazamos el eje de homología, de forma arbitraria, con la condición de que éste sea paralelo a la recta límite.
7.º Prolongamos los lados opuestos del cuadrilátero dado (3-4) y (1-2), hasta que corte al eje de homología en dos puntos M y N, por los que trazaremos rectas paralelas a la recta (Oa). Efectuamos la misma operación con los lados (1-4) y (2-3) y trazamos las paralelas a la recta (Ob).

NOTA: Las rectas (Oa) y (Ob) forman 90º, caso estudiado anteriormente. La intersección de las rectas anteriores se cortarán en los puntos 1' 2' 3' 4' que, unidos ordenadamente, será el cuadrado homólogo del cuadrilátero dado, solución del problema.

La afinidad es un caso particular de la homología. El eje lo denominaremos "Eje de Afinidad", y el centro será un punto impropio, por estar en el infinito. Ver Fig. 154.

Fig. 154

La Fig. 154 es similar a la estudiada en la Fig. 153. Queremos transformar el paralelogramo de vértices 1,2,3,4 en un cuadrado de vértices 1'2'3'4'. (Método de Afinidad.)

Sabiendo que los lados del cuadrado forman entre sí 90º, y que cada lado con la diagonal forma 45º, procederemos de la forma siguiente:

1.º Transformamos el ángulo (M 2 N) en un ángulo de 90º.
2.º El ángulo de 90º estará inscrito en la circunferencia de diámetro (MN) y centro (P).
3.º Para obtener el ángulo de 45º, trazaremos la perpendicular (AB) al diámetro (MN), obteniéndose el punto (P).
4.º Unimos los puntos (A) y (B) con P.
5.º Los lados 1' 2' y 2' 3', al estar contenidos en los segmentos MB y BN, respectivamente, forman entre sí 90º, y los lados (1' 4') - (2' 3') y (1' 2') - (3' 4') son paralelos entre sí, que prolongados, se cortan en el Eje de Afinidad, correspondiéndose con los del cuadrilátero (1-4) - (2-3) y (1-2) - (3-4), solución del problema.

Fig. 153

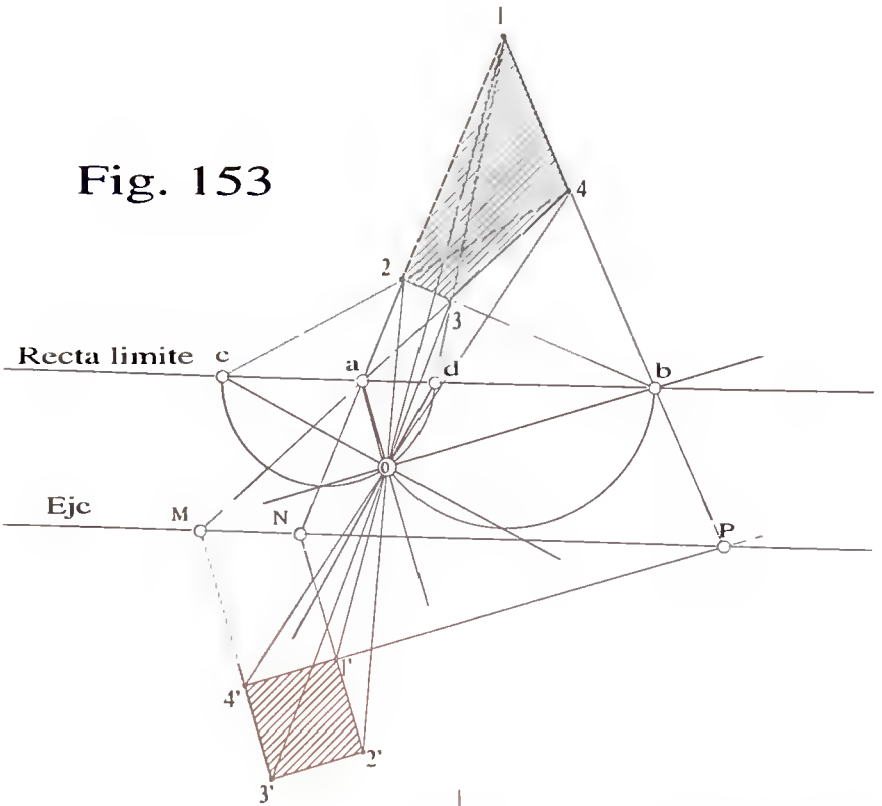
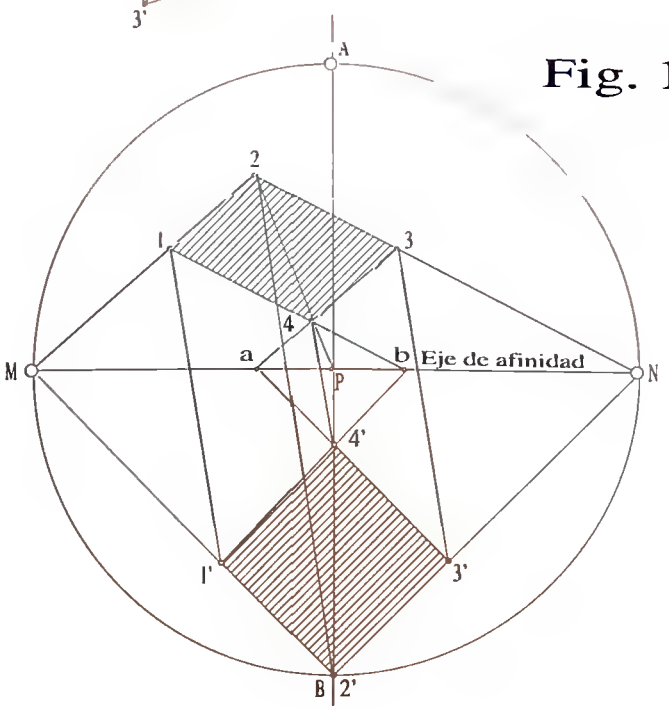


Fig. 154



JAR'23

Lugares geométricos, eje y centro radical, polo y polar

LUGARES GEOMETRICOS

El lugar geométrico es el formado por un conjunto de puntos del espacio que cumplen una determinada condición: por ejemplo, a) La mediatriz de un segmento, ya que cualquier punto de ésta equidista de sus extremos. b) La circunferencia, ya que cualquier punto de ésta equidista de su centro.

Fig. 155

La mediatriz (r) al segmento (MN) y la mediatriz (t) al segmento (NP), se cortan en el punto (O). El punto (O) es, por tanto, el centro de la circunferencia de radio OM = ON = OP y, según lo estudiado anteriormente, el punto (O) será el lugar geométrico de dicha circunferencia.

Fig. 156

Si trazamos una serie de circunferencias de centros O_1, O_2, O_3, etc., todos contenidos en una línea dada y dos puntos de ellas, tales como el P y el Q, se encuentran en una recta perpendicular a la línea anterior, podemos deducir que la recta perpendicular al segmento PQ que pasa por los centros O_1, O_2, O_3.. etc. es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de centros O_1, O_2, O_3, etc.

Fig. 157

Si desplazamos las circunferencias de la Fig. 156 hacia la derecha o hacia la izquierda sobre su eje, manteniendo sus centros en éste, podemos llegar a la conclusión de que en un determinado momento, al ser todas tangentes al segmento PQ, el segmento que pasa por los centros O_1, O_2, O_3, etc., es el lugar geométrico de todas las circunferencias de centros O_1, O_2, O_3, etc.

EJE RADICAL

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano, que tienen igual potencia respecto a dos circunferencias.

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA, es el producto de los segmentos comprendidos entre dicho punto y los de la circunferencia, al ser cortada ésta por una recta que pase por el punto dado.

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS

Fig. 158

Cuando las dos circunferencias son tangentes al eje radical, es la recta que, pasando por el punto de tangencia (P) de las circunferencias dadas, es perpendicular al segmento O_1 O_2, que pasa por sus centros.

Fig. 159

Cuando las dos circunferencias son secantes, la recta que une los puntos A y B, comunes a las dos circunferencias, es el eje radical.

Fig. 155

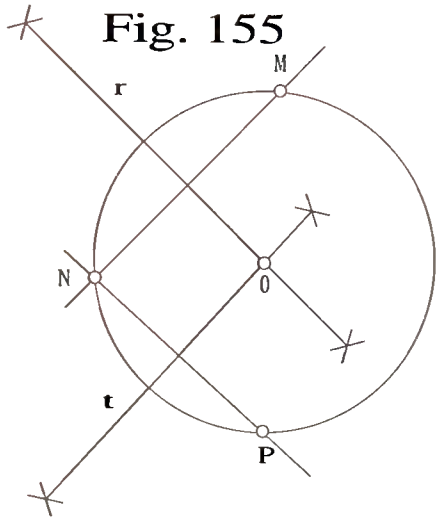


Fig. 156

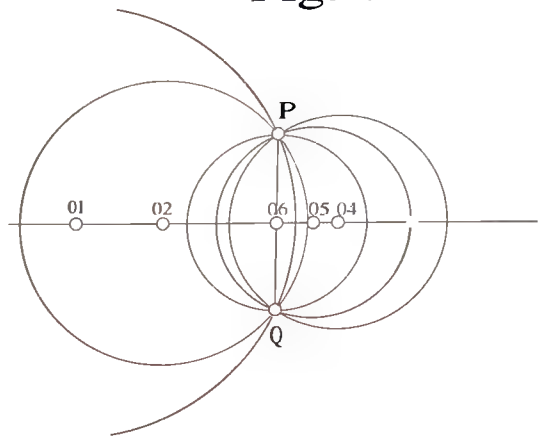


Fig. 157

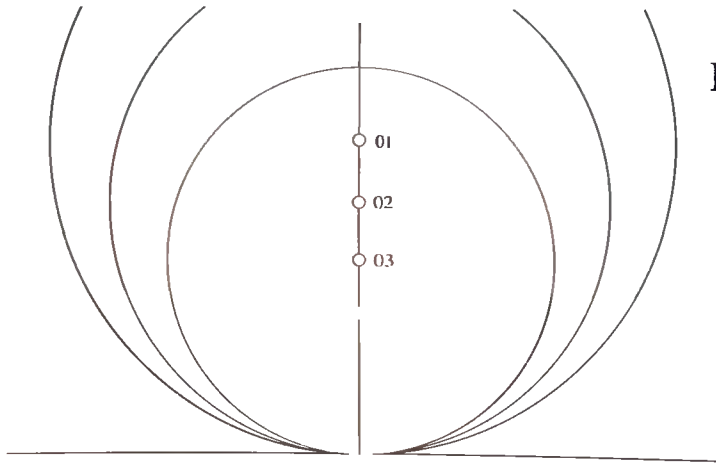


Fig. 158

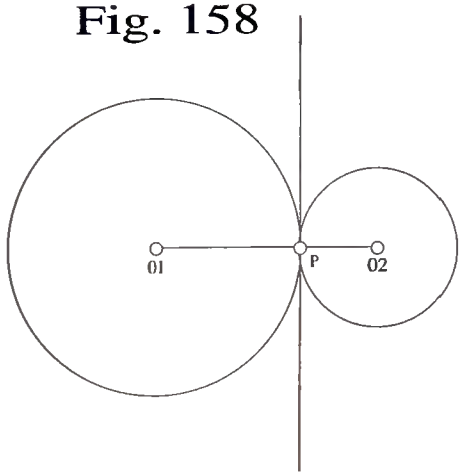


Fig. 159

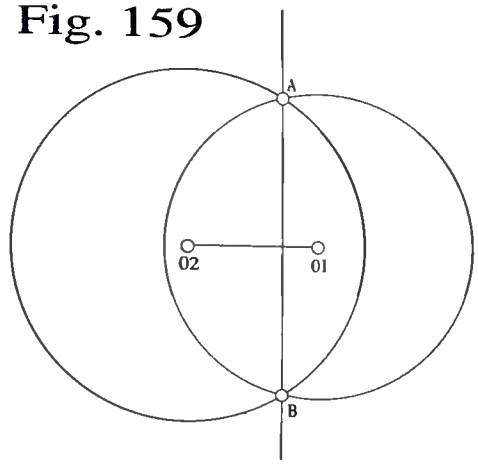


Fig. 160

Trazar el eje radical de dos circunferencias dadas, cuando éstas son exteriores.

1.º Dadas las circunferencias de centros O_1 y O_2, trazamos una tercera circunferencia auxiliar, de centro O, que corte a las anteriores, en nuestro caso en los puntos A, B, C y D.

2.º Unimos los puntos A y B de intersección de la circunferencia auxiliar con la de centro O_1.

3.º Unimos los puntos C y D de intersección de la circunferencia auxiliar con la de centro O_2.

4.º Unimos los centros de las circunferencias exteriores dadas por el segmento O_1 O_2.

5.º La recta (s), que pasa por el punto (P) de intersección de las rectas trazadas en los apartados 2.º y 3.º y sea perpendicular al segmento O_1 O_2, es el eje radical de la circunferencias dadas, solución del problema.

CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS DADAS

Denominamos centro radical de tres circunferencias dadas al punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias, tomados de dos en dos.

Fig. 161

Hallar el centro radical de las tres circunferencias dadas de centros O_1 O_2 y O_3.

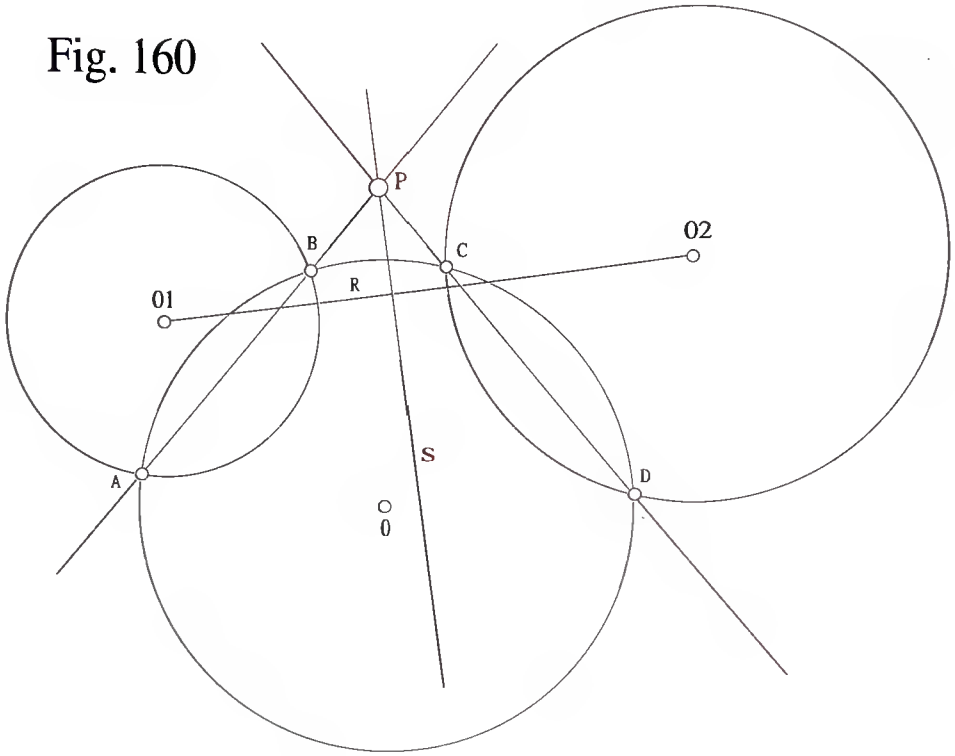
Seguiremos el mismo procedimiento de la Fig. 160, es decir:

1.º Unimos los puntos 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6, de intersección entre las circunferencias de centros O_1 O_2 y O_3 con la auxiliar de centro (C), obteniéndose los puntos M, N y P.

2.º Por los puntos M, N y P, trazamos perpendiculares a los segmentos NP, MP y MN, respectivamente.

3.º La intersección de las perpendiculares trazadas a los segmentos NP, MP y MN determinarán el punto (C) centro radical, solución del problema.

Fig. 160



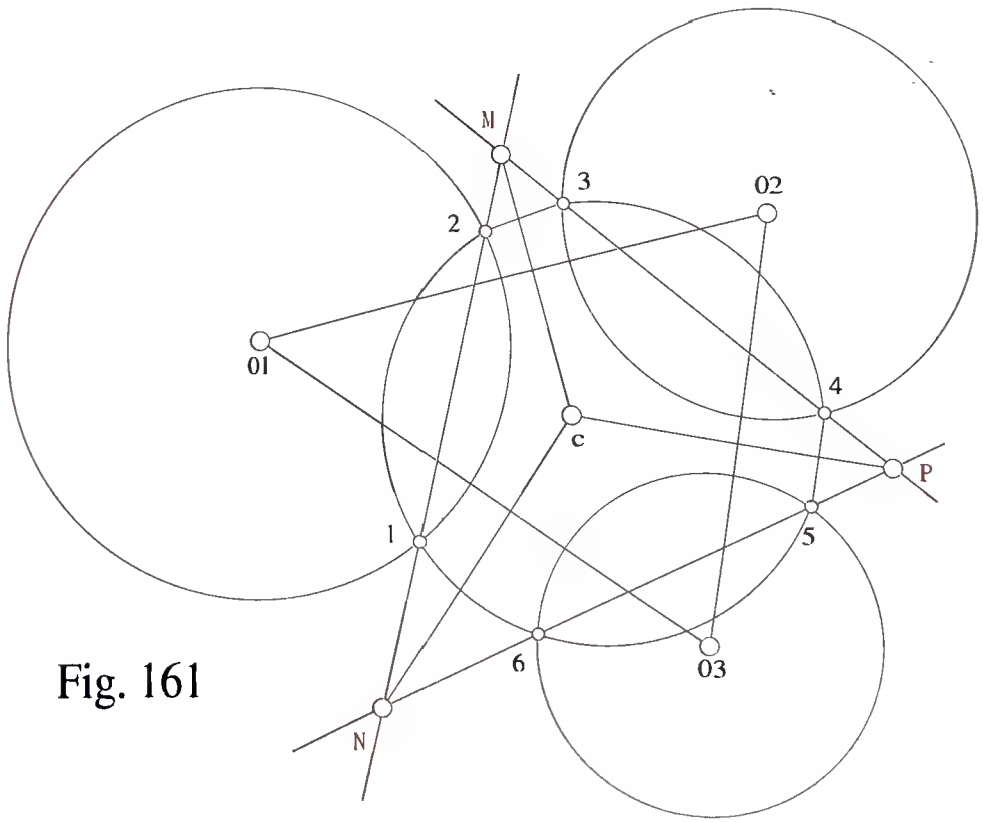


Fig. 161

JAR'23

Hélice cilíndrica y cónica; sus desarrollos

HELICES
GENERALIDADES

La hélice es una curva cuyas tangentes forman un ángulo constante con una dirección dada.

Las hélices son curvas que quedan descritas por un punto (P), que se desplaza hacia arriba en el sentido de su generatriz, al mismo tiempo que ésta gira alrededor de su eje.

Tanto los desplazamientos como los giros deben ser proporcionales.

Las hélices pueden ser cilíndricas, cónicas o esféricas, según que la superficie de revolución sobre la que se desplaza el punto (P) se un cilindro, un cono o una esfera.

HELICE CILINDRICA

Cuando la hélice sea cilíndrica, denominaremos diámetro de la hélice al del diámetro del cilindro sobre el que se genera.

El paso será igual al valor de la altura de la distancia entre dos puntos de la misma generatriz.

Fig. 162 a y Fig. 162 b

Trazar un hélice cilíndrica, conociéndose su diámetro y su paso.

1.º Trazamos una circunferencia, cuyo diámetro sea igual al de la hélice. (En nuestro caso ver Fig. 162 b.)

2.º Trazamos un rectángulo, cuya base sea igual al diámetro de la hélice y su altura igual al paso. (Ver Fig. 162 a.)

3.º Dividimos la circunferencia de la base en cualquier número de partes iguales (en nuestro caso en 16), obteniéndose los puntos 1 a 16.

4.º Dividimos la altura del rectángulo (Fig. 162 a) en las mismas partes (16), trazando, por ellos, paralelas a la base.

5.º Las proyecciones ortogonales de los puntos de la base, Fig. 162 b, cortarán a las rectas horizontales de la Fig. 162a en una serie de puntos que, unidos de forma ordenada, nos darán la proyección vertical de la curva pedida, "hélice cilíndrica".

Fig. 162 a

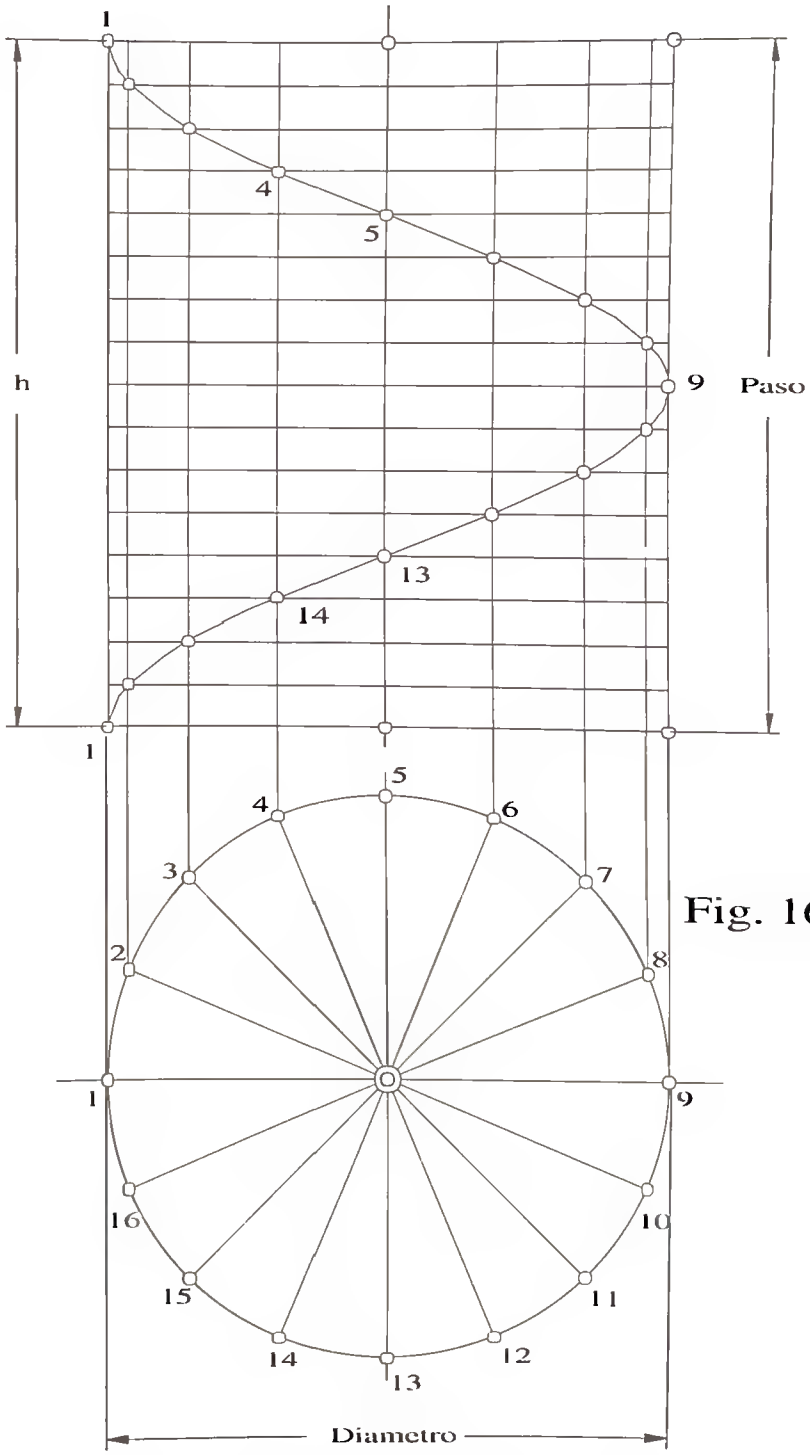


Fig. 162 b

TRANSFORMADA DE UNA HELICE CILINDRICA

Para obtener la transformada o desarrollo de una hélice cilíndrica, construimos una serie de rectángulos superpuestos, siendo el número de éstos igual al del número de vueltas o espiras de la hélice.

Fig. 163 a

1.º Similar a lo estudiado en la Fig. 162, hemos representado en la Fig. 163 a un cilindro de altura = 1,5 x el paso.
2.º La distancia entre los puntos (9) y (9) de la misma generatriz (9), será el valor del paso de la hélice. La circunferencia, proyección horizontal del cilindro, la dividiremos en un número de partes (en nuestro caso la dividiremos en un número de partes (en nuestro caso en 16) y, estas divisiones, las proyectaremos ortogonalmente al plano vertical, obteniéndose las generatrices correspondientes.
3.º Cortamos al cilindro por tantos planos horizontales como divisiones hemos efectuado en la circunferencia base, limitándose los planos por el valor del paso.
4.º Las intersecciones de las generatrices del cilindro con los planos anteriores, determinarán lo puntos de intersección de la hélice.

DESARROLLO DE UNA HELICE CILINDRICA

Fig. 163 b

1.º Trazamos el rectángulo ABCD, cuya base DC sea igual al perímetro del cilindro y su altura AD = BC sea igual al paso de la hélice.
2.º Unimos los puntos D y B, obteniéndose el segmento DB, transformada o desarrollo de la hélice.
3.º En la Fig. 163 b hemos representado dos espiras, mientras que en la Fig. 163 a sólo se ha representado 1,5 espiras.

Fig. 163 a

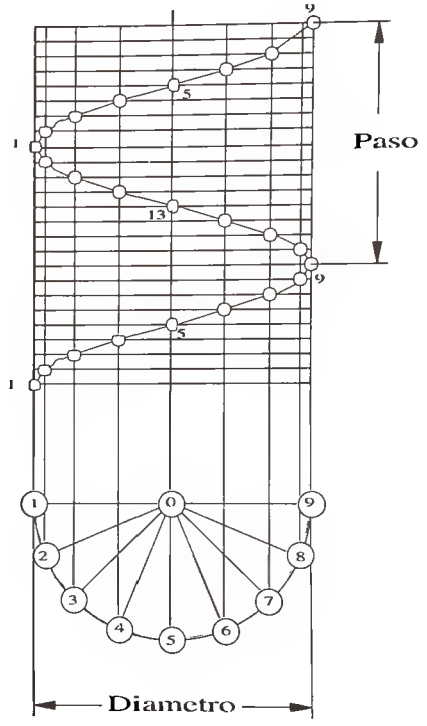


Fig. 163b

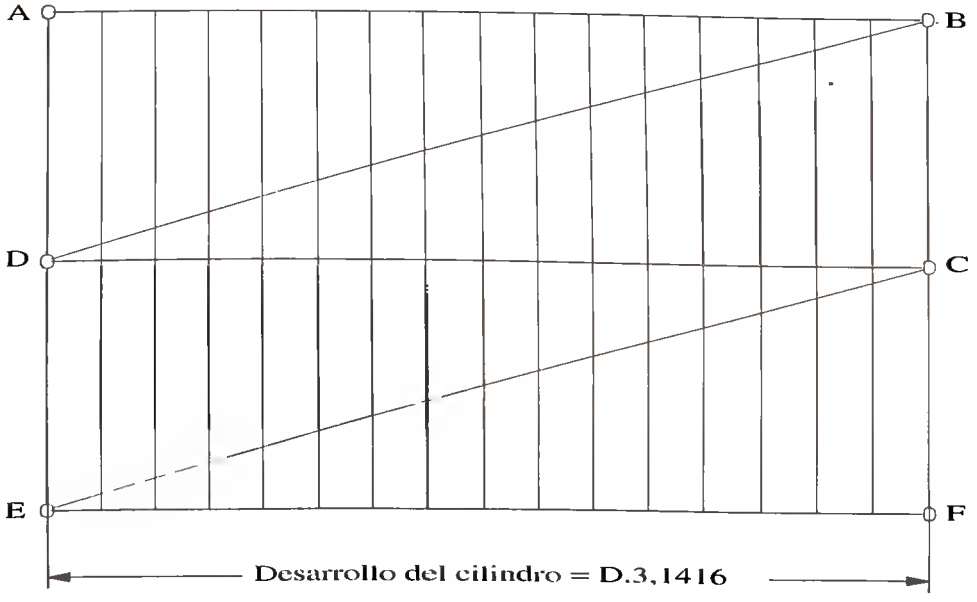


Fig. 164

Trazar una hélice cónica, conociéndose el diámetro (AB) y el paso.

1.º Trazamos un cono, representado por su proyección horizontal, circunferencia de centro (O) y diámetro AB, así como su proyección vertical, el triángulo ABV.

2.º Dividimos la circunferencia de la base, así como la altura del cono correspondiente al paso, en un número de partes (en nuestro caso 12).

3.º Los puntos 1, 2, 3... etc., de intersección entre las generatrices del cono, que pasan por las divisiones de la base y los planos paralelos a la base, ordenadamente unidos, determinarán la curva "hélice cónica".

Fig. 165

Trazar el desarrollo de una hélice cónica.

1.º Trazamos un sector circular de radio (O1), igual al valor de la generatriz (VA). Ver Fig. 164.

2.º La amplitud del arco, formado por los lados del sector circular, limitado por los puntos (1, O, 1), formará un determinado ángulo.

3.º El valor del ángulo en grados centesimales lo podemos obtener según la siguiente fórmula:

$$\text{Valor del ángulo en grados centesimales} = \frac{360 \times (OA)}{(VA)}$$

4.º Es decir, la amplitud del ángulo en grados centesimales, será la relación entre el radio de la base del cilindro y su generatriz, multiplicada por 360.

5.º La generatriz (O1) la dividimos en el mismo número de divisiones de la circunferencia de la base del cono (en nuestro caso en 12).

6.º Por el punto (O) trazamos arcos de círculos concéntricos, cuyos radios coincidan con las divisiones obtenidas en el apartado 5.º, sobre la generatriz (O1).

7.º El ángulo (1, O, 1) se divide en doce partes y trazamos los radios (O-1), (O-2), (O3) .. etc.

8.º Los puntos de intersección entre los arcos del apartado 6.º y los radios del apartado 7.º, unidos ordenadamente, nos darán la curva "hélice cónica", solución del problema.

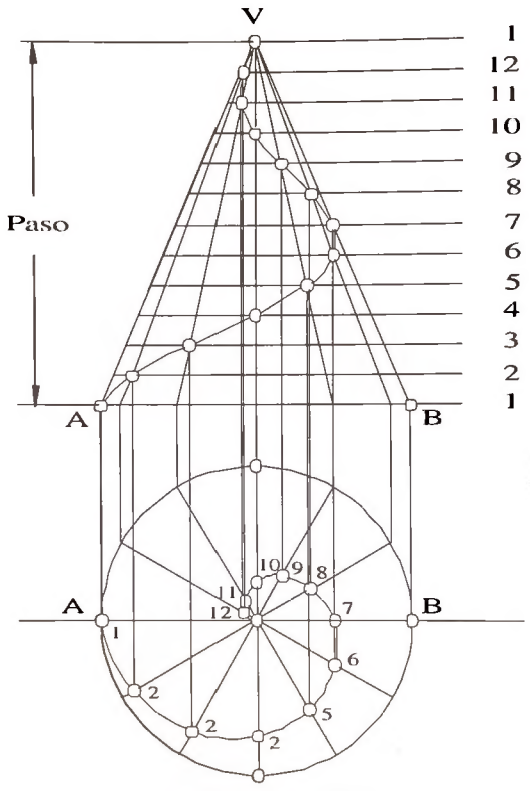


Fig. 164

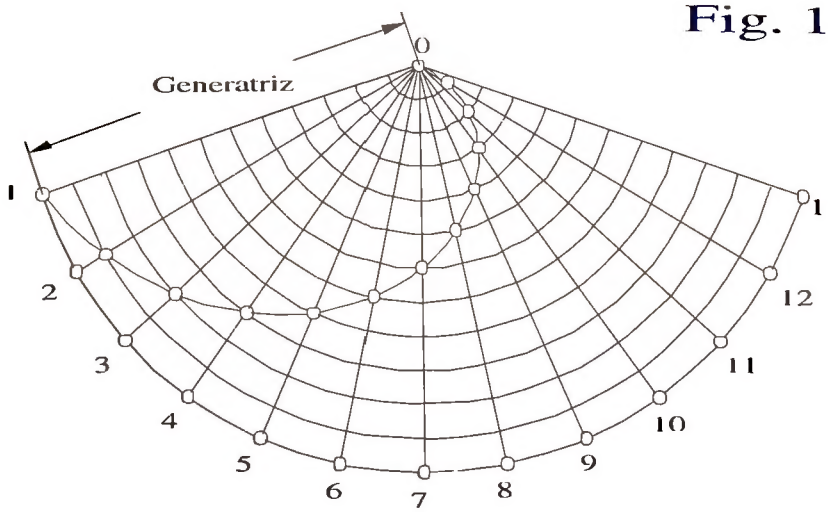


Fig. 165

Figs. 166 y 167

Trazar una hélice esférica.

1.º Representamos una semiesfera en sus dos proyecciones, horizontal y vertical.

2.º La proyección horizontal (Fig. 167) será una circunferencia de diámetro igual al de la esfera.

3.º Para la proyección vertical (Fig. 166), sólo representaremos una semicircunferencia de diámetro igual al de la esfera (1-7).

4.º Dividimos la circunferencia en un número cualquiera de partes, en nuestro caso en 12.

5.º Dividimos la altura h de la semicircunferencia en el mismo número de partes que en el apartado 4.º, es decir, en 12.

6.º Las secciones producidas en la semicircunferencia de la Fig. 166 se proyectarán en la circunferencia de la Fig. 167, como una serie de círculos concéntricos.

7.º La intersección de los círculos concéntricos de la Fig. 167 con las divisiones del apartado 4.º, nos darán los puntos de intersección a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n y o que, unidos ordenadamente, nos dará la proyección horizontal de la hélice esférica.

8.º Los puntos obtenidos en el apartado 7.º los proyectamos, ortogonalmente, hacia la Fig. 166 y éstos quedarán definidos en cada sección horizontal.

9.º La unión ordenada de los puntos obtenidos en el apartado 8.º nos dará la proyección vertical de la hélice esférica, solución del problema.

FORMULARIO

	SUPERFICIE	VOLUMEN
CILINDRO	*6,2832 • r • h	0,7854 d^2 •h
CONO	*3,1416 • r • g *1,5708 • d • g	0,2618 d^2 h
ESFERA	3,1416 • d^2	0,5236 d^3

NOTAS

* = SUPERFICIE LATERAL
r = RADIO
d = DIAMETRO
g = GENERATRIZ

Fig. 166

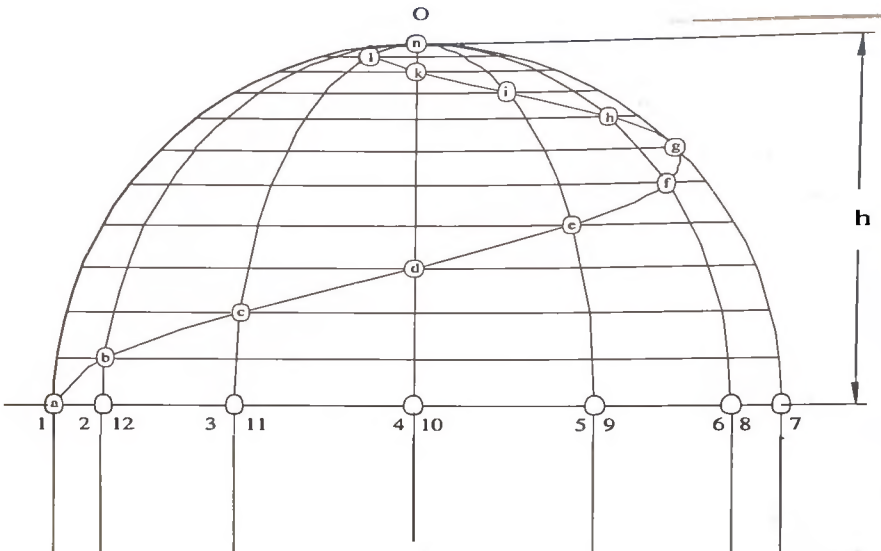
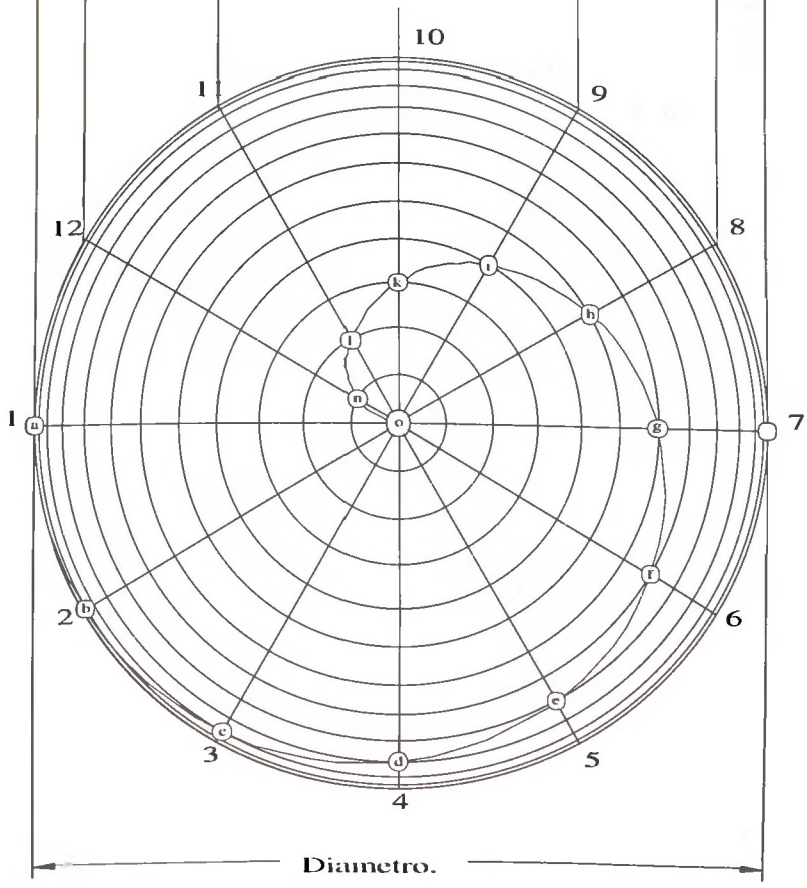



Fig. 167